

12.3. TÉRGEOMETRIA

Térelemek – megoldások

4166 *a)* A pontok $\binom{10}{2} = 45$ egyenest határoznak meg.

b) Minimálisan 1 síkot határoznak meg a pontok.

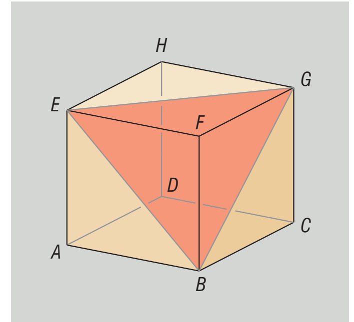
c) Maximálisan $\binom{10}{3} = 120$ síkot határoznak meg a pontok.

4167 Ha bármely két sík párhuzamos, akkor a metszésvonalak száma 0. A metszésvonalak számának maximuma: $\binom{10}{2} = 45$.

4168 *a)* Az ábra egy ilyen síkot mutat. A következő síkok felelnek meg a feltételnek:

BEG, *BED*, *AFH*, *AFC*, *DGB*, *DGE*, *HCF*, *HCA*.

A kocka csúcsai közül összesen 8 sík tartalmaz pontosan 3 csúcsot.



b) A sík a kockának 3 vagy 4 csúcsát tartalmazhatja. A 3 csúcsot tartalmazó síkokból 8 darab van. A 4 csúcsot tartalmazó síkok vagy a kocka két párhuzamos helyzetű lapátlóját tartalmazzák, vagy a kocka valamelyik lapját. Mindkét fajta síkból 6 darab van. A legalább 3 csúcsot tartalmazó síkok száma 20.

4169 *a)* *BF*, *CG*, *DH*;

b) *AD*, *BC*, *AE*, *BF*, *FG*, *EH*, *CG*, *DH*;

c) *CG*, *DH*, *EH*, *FG*.

4170 *a)* 90°; *b)* 90°; *c)* 90°; *d)* 0°; *e)* 45°; *f)* 60°; *g)* 45°.

Az *AC* egyenes kitérő helyzetű az *FB*, *HF*, *ED* és *HG* egyenesekkel. Az *AC* egyenes párhuzamos az *EG* egyenessel.

4171 *a)* $a\sqrt{2}$; *b)* $a\sqrt{3}$.

4172 A lapátlók hossza: $3\sqrt{2} \approx 4{,}24$ cm, illetve $3\sqrt{10} \approx 9{,}49$ cm.

A testátlók hossza: $3\sqrt{11} \approx 9{,}95$ cm.

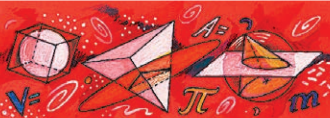
4173 A kocka éle: $\sqrt{48} = 4\sqrt{3} \approx 6{,}93$ cm.

4174 Körülbelül 54,74°-ot.

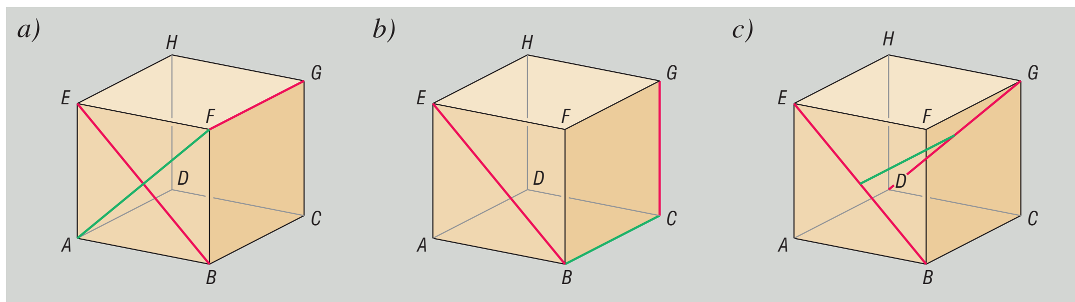
4175 60°-ot. (Lásd a 4168. feladat ábráját.)

4176 Körülbelül 35,26°-ot.

4177 Három különböző távolság lép fel: $\frac{a}{2}$, $\frac{a\sqrt{5}}{2}$ és $\frac{3a}{2}$.



4178 A piros szakaszok normál transzverzálisainak a kocka valamely lapjára vagy belsejébe eső részét minden esetben zöld színnel jelöltük meg.



a) Az EB és FG szakaszok távolsága $\frac{a\sqrt{2}}{2}$, hajlásszögük 90º.

b) Az EB és GC szakaszok távolsága a, hajlásszögük 45º.

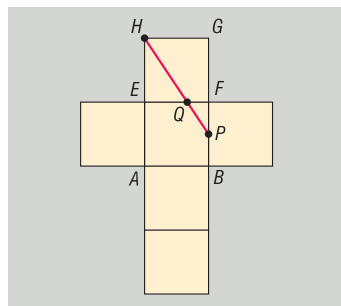
c) Az EB és DG szakaszok távolsága a, hajlásszögük 90º.

4179 A keletkező háromszög szabályos, oldalának hossza: $\frac{5\sqrt{2}}{2} \approx 3{,}5$ cm.

4180 A kialakuló négyszög minden oldala $\frac{a\sqrt{2}}{2}$, tehát rombusz. Mivel átlói a kocka két szemközti lapjának középpontját kötik össze, ezért átlói is ugyanakkorák, így valóban négyzetről van szó. Természetesen szögeiről is könnyen belátható, hogy 90º-osak.

A keletkező négyzet területe: $\frac{a^2}{2}$.

4181 *a)* $\frac{3}{2}a$. *b)* $2{,}5a$.



c) A kocka lapjain haladó legrövidebb PH út megtalálásához készítsük el a kocka síkbeli hálóját. A lapokon vezető legrövidebb út a P pontot a H ponttal összekötő szakasz lesz. Az ábrán látható háló esetén a PHG derékszögű háromszögben:

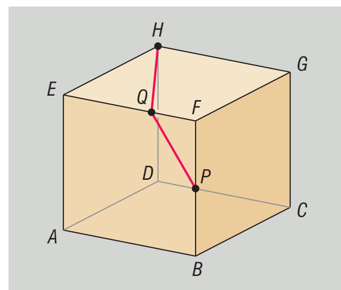
$$PH = \sqrt{a^2 + \left(\frac{3}{2}a\right)^2} = \frac{a\sqrt{13}}{2}.$$

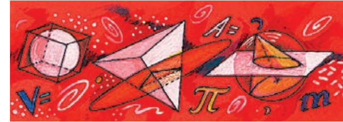
A legrövidebb út hossza: $\frac{a\sqrt{13}}{2}$.

Megjegyzés: Ha a legrövidebb PH út az EF élt a Q pontban metszi, akkor a PQF és PHG háromszögek hasonlóságát felhasználva meghatározhatjuk a Q pont F csúcstól való távolságát, hiszen:

$$\frac{QF}{HG} = \frac{PF}{PG} = \frac{1}{3} \quad \Rightarrow \quad QF = \frac{HG}{3} = \frac{EF}{3},$$

ezért Q a kocka EF élének F-hez közelebbi harmadolópontja. A kocka lapjain vezető egyik legrövidebb PH utat az ábra szemlélteti.





Nem a fenti az egyetlen legrövidebb út, amely a kocka lapjain a P pontból a H pontba vezet. Javasoljuk az FG élen keresztülhaladó út, valamint a kocka ahhoz tartozó hálójának megkeresését is.

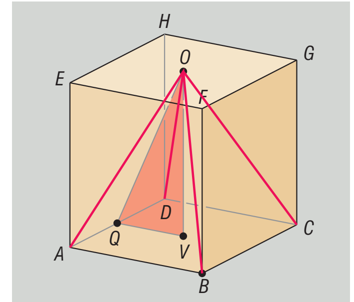
A teljes precizitáshoz hozzátartozik az AE, illetve a CG éleken keresztülvezető utak vizsgálata is. Az ilyen utak közül a legrövidebb hossza azonban $\frac{a\sqrt{17}}{2}$, ami nagyobb, mint az EF élen áthaladó legrövidebb út hossza.

4182 *a)* Az alaplap élei (AB, BC, CD, DA) 12 cm hosszúak. Az oldallapokon található élek (AO, BO, CO és DO) hossza Pitagorasz tételével számolható. Például az AOE derékszögű háromszögben $AO^2 = AE^2 + OE^2$, azaz

$$AO^2 = 12^2 + \left(6\sqrt{2}\right)^2, \quad \text{amiből} \quad AO = \sqrt{216} = 6\sqrt{6} \approx 14{,}70 \text{ cm}.$$

A gúla oldaléleinek hossza körülbelül 14,70 cm.

b) A gúla ADO oldallapja és $ABCD$ alaplapja által bezárt szög megegyezik az OQV derékszögű háromszög Q csúcsánál lévő szögével, ahol Q az AD él felezőpontja, V pedig az $ABCD$ alaplap középpontja. Az $ADO_\triangle$ alaphoz tartozó magassága Pitagorasz tételével számolva:



$$OQ = 6\sqrt{5} \approx 13{,}42 \text{ cm}.$$

Mivel $OV = 12$ cm, ezért:

$$\sin(OQV\sphericalangle) = \frac{12}{6\sqrt{5}} \approx 0{,}8944 \quad \Rightarrow \quad OQV\sphericalangle \approx 63{,}43°.$$

A gúla oldallapja és alaplapja által bezárt szög körülbelül 63,43°.

c) A keresett szög megegyezik például az OAV derékszögű háromszög A csúcsánál lévő szögével. Az $OAV_\triangle$-ben:

$$\sin(OAV\sphericalangle) = \frac{12}{6\sqrt{6}} \approx 0{,}8165 \quad \Rightarrow \quad OAV\sphericalangle \approx 54{,}74°.$$

A gúla oldaléle az alaplappal körülbelül 54,74°-os szöget zár be.

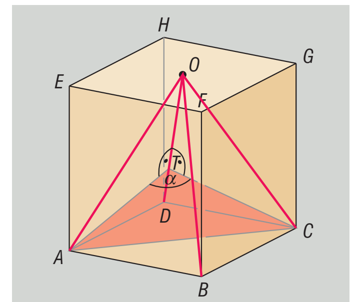
d) Az OA oldalél és az AD alapél által bezárt szöget az OAQ derékszögű háromszögből számolhatjuk ki:

$$\text{tg}(OAQ\sphericalangle) = \frac{OQ}{AQ} = \frac{6\sqrt{5}}{6} \approx 2{,}2361 \quad \Rightarrow \quad OAQ\sphericalangle \approx 65{,}91°.$$

A gúla oldaléle az alapéllel körülbelül 65,91°-os szöget zár be.

e) Jelöljük T-vel az $ADO_\triangle$ A csúcsából induló magasságának DO oldalon lévő talppontját. Ekkor a T pont egyben a $DCO_\triangle$ C csúcsából induló magasságának is talppontja, ezért a két szomszédos oldallap hajlásszöge megegyezik az AT és CT magasságok hajlásszögével.

A két sík által bezárt α szöget az ACT egyenlő szárú háromszög oldalaiból fogjuk kiszámolni.





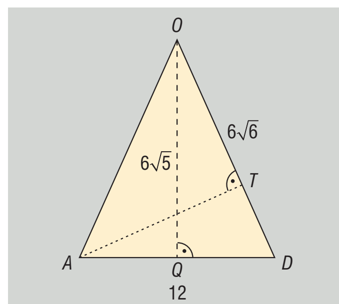
Előbb kiszámoljuk az AT szakasz hosszát. Az $ADO_\triangle$ alaphoz tartozó magassága a *b)* feladat alapján:

$$OQ = 6\sqrt{5} \approx 13{,}42 \text{ cm.}$$

A háromszög területét kétféleképpen számítva:

$$\frac{6\sqrt{6} \cdot AT}{2} = \frac{12 \cdot 6\sqrt{5}}{2},$$

$$AT = 12\sqrt{\frac{5}{6}} \approx 10{,}95 \text{ cm.}$$



Végül az $ACT_\triangle$-ben a koszinusztétel alapján:

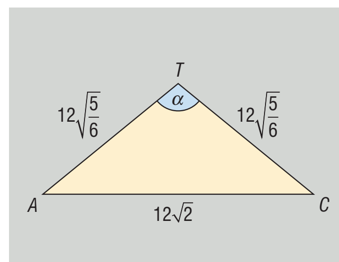
$$AC^2 = AT^2 + CT^2 - 2 \cdot AT \cdot CT \cdot \cos\alpha.$$

Mivel $AC = 12\sqrt{2}$ $(\approx 16{,}97 \text{ cm})$, ezért:

$$288 = 120 + 120 - 2 \cdot 12 \cdot \sqrt{\frac{5}{6}} \cdot 12 \cdot \sqrt{\frac{5}{6}} \cdot \cos\alpha,$$

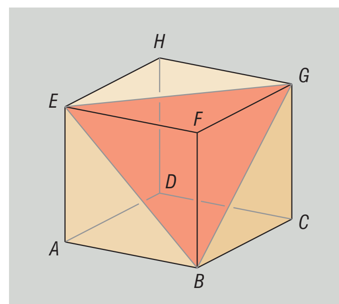
$$\cos\alpha = -0{,}2.$$

A gúla két oldallapja $101{,}54°$-os szöget zár be egymással.



4183 A kocka csúcsai közül összesen $\binom{8}{3} = 56$-féleképpen lehet hármat kiválasztani.

a) Szabályos háromszöget úgy kaphatunk, ha kiválasztunk egy csúcsot, valamint a csúcsra illeszkedő két lapátló csúcstól különböző végpontjait (ilyen például az ábrán szereplő $BEG_\triangle$). Mivel egy csúcshoz 3 lapátló csatlakozik, ezért közülük 2-t összesen 3-féleképpen lehet kiválasztani. Ez azt jelenti, hogy a kocka minden csúcsa 3 darab szabályos háromszögre illeszkedik (például a B csúcs a BEG, BED, BDG háromszögekre). Mivel 8 csúcs van, ezért a háromszögek száma 24, de minden háromszöget mind a három csúcsánál egyszer számoltunk, így összesen 8 darab szabályos háromszög választható ki a kocka csúcsai közül, ezért a keresett valószínűség: $\frac{8}{56} = \frac{1}{7}$.



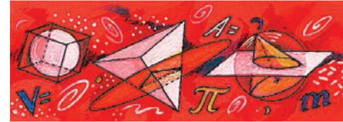
b) Derékszögű háromszögből kétféle van.

I. A kocka valamelyik lapjára illeszkedő háromszög. Minden lapon 4 derékszögű háromszög található (például a $BCGF$ lapon a BCG, CGF, GFB, FBC háromszögek). Ebből a fajta háromszögből tehát összesen 24 darab van.

II. A kocka valamelyik átlós síkjára illeszkedő háromszög. Minden ilyen síkon 4 derékszögű háromszög található (például az $ACGE$ síkon az ACG, CGE, GEA, EAC háromszögek). Mivel összesen 6 átlós sík van, ezért az ilyen típusú háromszögek száma szintén 24.

Összesen 48 darab derékszögű háromszög választható ki a kocka csúcsai közül, ezért a keresett valószínűség: $\frac{48}{56} = \frac{6}{7}$.

4184 Igaz. A két metszésvonal nem lehet kitérő helyzetű, mert egy síkban vannak, ugyanis mindkettő benne van a párhuzamosokat metsző síkban. Ugyanakkor nem lehet a két egyenes metsző helyzetű sem, mert a feltételek alapján különböző, egymással párhuzamos síkokban találhatók. Ebből adódóan a két kialakuló metszésvonal csakis párhuzamos lehet egymással.

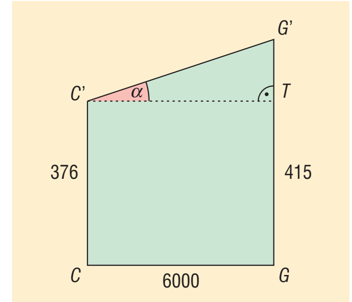


4185 *a)* Az AE éllel a GF, BC, KJ élek párhuzamosak.

b) Az ED egyenesre a következő élek merőlegesek: EF, AG, BK, CJ, HI (illetve az összeillesztés után vele megegyező LM).

c) Az EF egyenessel kitérő helyzetű élek: DC (illetve az összeillesztés után vele megegyező LC), BC, AB, MJ, KJ.

4186 *a)* Az ábra azt a függőleges síkmetszetet mutatja, amelyik tartalmazza a Csobánc (C'), valamint a Szent György-hegy (G') csúcsát is. A két hegycsúcs vízszintes síkon lévő vetületét C, illetve G jelöli. A térképen mért 15 cm a valóságban 6000 méternek felel meg, ezért $CG = 6000$ méter. Ha a $CGG'C'$ derékszögű trapéz C' csúcsából induló magasságának talppontját T jelöli, akkor a $G'C'T$ derékszögű háromszögben:



$$G'C'^2 = C'T^2 + G'T^2,$$

$$G'C'^2 = 6000^2 + (415 - 376)^2,$$

$$G'C' = \sqrt{36\,001\,521},$$

$$G'C' \approx 6000{,}1 \text{ m}.$$

A két hegycsúcs távolsága 6000,1 méter.

b) A $G'C'T_{\triangle}$-ben:

$$\cos\alpha = \frac{6000}{\sqrt{36\,001\,521}} \quad \Rightarrow \quad \alpha \approx 0{,}37°.$$

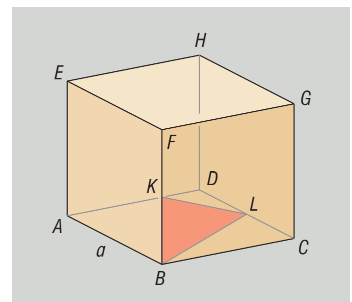
A Csobánc tetejéről a Szent György-hegy teteje 0,37°-os „emelkedési szög" alatt látszik (gyakorlatilag egy vonalban vannak).

Megjegyzés: $\cos\alpha$ négy tizedesjegyre kerekített értéke 1,0000, amiből α-ra 0°-ot kapnánk, ami azért lenne furcsa, mert a Szent György-hegy a magasabb.

Ha a $\cos\alpha$ kiszámolásakor a $G'C'$ távolság *a)* feladatban kapott közelítő értékét használjuk, akkor $\alpha \approx 0{,}33°$ adódik.

A feladat mutatja, hogy még a négy tizedesjegyre történő kerekítés sem mindig ad hű képet a valóságról.

4187 Tekintsük az $ABCDEFGH$ kocka BF élének K, illetve CD élének L felezőpontját. Mivel KB merőleges az $ABCD$ lap síkjára, így merőleges annak minden egyenesére, ezért az LKB háromszög derékszögű. A háromszög LB befogójának hossza könnyen kiszámolható az LBC derékszögű háromszögből. Pitagorasz tétele alapján ugyanis:

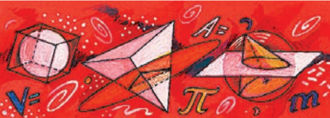


$$LB^2 = a^2 + \left(\frac{a}{2}\right)^2 = \frac{5}{4}a^2 \quad \Rightarrow \quad LB = a\frac{\sqrt{5}}{2}.$$

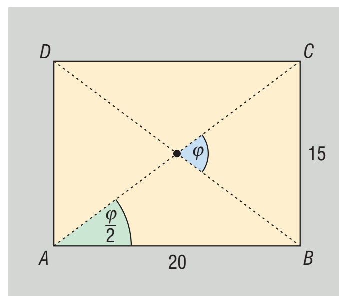
Végül az LKB háromszögben:

$$LK^2 = LB^2 + BK^2 = \frac{5}{4}a^2 + \left(\frac{a}{2}\right)^2 = \frac{3}{2}a^2 \quad \Rightarrow \quad LK = a\sqrt{\frac{3}{2}}.$$

Könnyen belátható, hogy bármely két kitérő helyzetű él felezőpontja ugyanekkora távolságra van egymástól.



4188 *a)* Ha az $ABCD$ alaplap átlói által bezárt szög φ, akkor az átlók $\frac{\varphi}{2}$ szöget zárnak be a téglalap megfelelő oldalával (ld. ábra).



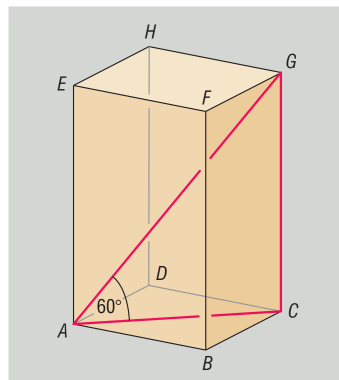
Az ABC derékszögű háromszögben:

$$\operatorname{tg}\frac{\varphi}{2} = \frac{15}{20},$$

$$\varphi \approx 73{,}74°.$$

Az alaplap két átlója $73{,}74°$-os szöget zár be egymással.

b) Az AC átló hossza 25 cm (Pitagorasz-tétel). Az ábra ACG háromszögében:



$$\cos 60° = \frac{AC}{AG},$$

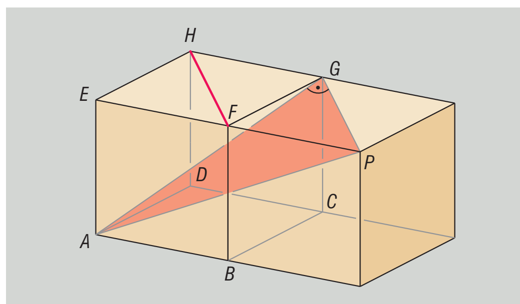
$$AG = 50 \text{ cm}.$$

A téglatest testátlója 50 cm hosszú.

c) A téglatest GC, illetve a GC-vel párhuzamos éleinek hossza:

$$25\sqrt{3} \approx 43{,}30 \text{ cm}.$$

4189 A két egyenes hajlásszögét úgy a legegyszerűbb kiszámolni, ha az egyiket önmagával párhuzamosan a másik egyenes egy pontjába toljuk. Például helyezzünk az $ABCDEFGH$ kocka „mellé” egy ugyanakkora élű kockát az ábrán látható módon. Mivel $GP \parallel HF$, ezért az AG testátló és a HF lapátló hajlásszöge megegyezik az AG szakasz, valamint az új kocka GP lapátlója által bezárt szöggel.

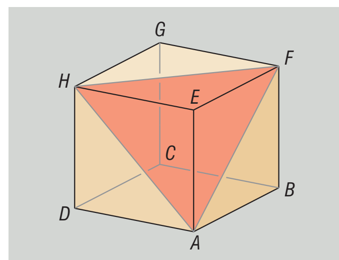


A keresett szöget az AGP háromszög oldalaiból számolhatjuk. Ha a kocka élét a jelöli, akkor az AG testátló hossza: $AG = a\sqrt{3}$, a GP lapátló hossza: $GP = a\sqrt{2}$, míg az AP szakasz hossza Pitagorasz tételének alkalmazásával $AP = a\sqrt{5}$. Vegyük észre, hogy $AG^2 + GP^2 = AP^2$, hiszen:

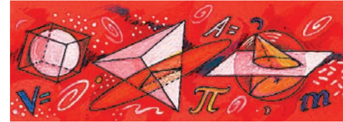
$$\left(a\sqrt{3}\right)^2 + \left(a\sqrt{2}\right)^2 = \left(a\sqrt{5}\right)^2,$$

ezért Pitagorasz tételének megfordítása alapján az AGP háromszög derékszögű. Az AG testátló, valamint a HF lapátló tehát merőleges egymásra.

4190 *a)* Mivel a HAF háromszög minden oldala a kocka lapátlójával egyenlő (ld. ábra), ezért a háromszög szabályos. Ebből következik, hogy



$$HAF\sphericalangle = 60°.$$



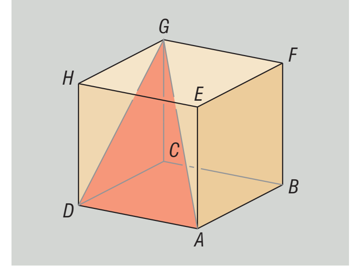
b) Ha a kocka éle a hosszúságú, akkor az ADG háromszög oldalai:

$$AD = a, \quad GD = a\sqrt{2} \quad \text{és} \quad AG = a\sqrt{3}.$$

Mivel $AD^2 + DG^2 = AG^2$, ezért a háromszög derékszögű, így

$$ADG\sphericalangle = 90°.$$

Megjegyzés: Mivel AD merőleges a $DCGH$ síkra, ezért annak minden egyenesére is merőleges, amiből szintén adódik, hogy $ADG\sphericalangle = 90°$.



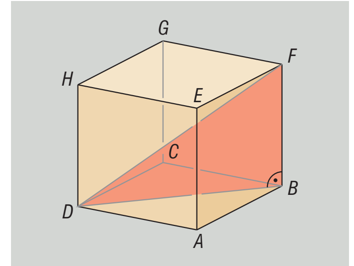
c) A *b)* feladathoz hasonló módszerrel belátható, hogy

$$FGD\sphericalangle = 90°.$$

d) Ha a kocka éle a, akkor a BDF derékszögű háromszögben:

$$\operatorname{tg} BDF\sphericalangle = \frac{a}{a\sqrt{2}} = \frac{\sqrt{2}}{2},$$

$$BDF\sphericalangle \approx 35{,}26°.$$



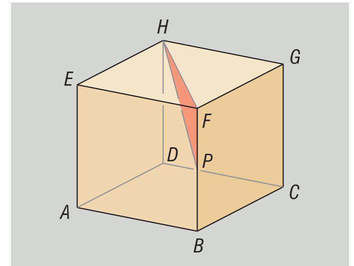
4191 *a)* A PHF háromszög derékszögű, hiszen PF merőleges az $EFGH$ síkra, így merőleges annak minden egyenesére. A háromszög oldalai:

$$PF = 5 \text{ cm}, \quad FH = 10\sqrt{2} \approx 14{,}14 \text{ cm}.$$

Pitagorasz tétele alapján:

$$PH^2 = 5^2 + \left(10\sqrt{2}\right)^2,$$

$$PH = 15 \text{ cm}.$$



b) Az EKH derékszögű háromszögben:

$$KH^2 = EK^2 + EH^2 = 5^2 + 10^2 = 125,$$

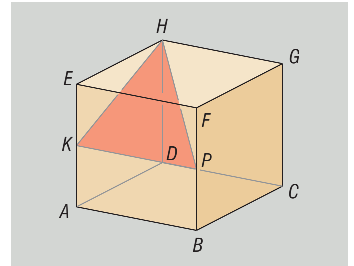
amiből:

$$KH = 5\sqrt{5} \approx 11{,}18 \text{ cm}.$$

Az *a)* feladat eredménye alapján $PH = 15$ cm. Nyilvánvaló továbbá, hogy $KP = 10$ cm. Mivel

$$KH^2 + KP^2 = 125 + 100 = 225 = PH^2,$$

ezért Pitagorasz tételének megfordítása alapján a PHK háromszög derékszögű.



Megjegyzés: Ez abból is következik, hogy a KP szakasz merőleges a kocka $AEHD$ lapjára.

c) Az EPF derékszögű háromszögben:

$$EP^2 = 10^2 + 5^2 = 125,$$

amiből:

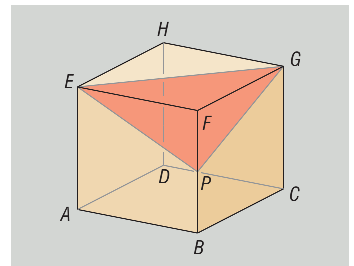
$$EP = 5\sqrt{5} \approx 11{,}18 \text{ cm}.$$

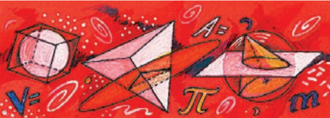
Az EPF és GPF háromszögek egybevágóságából következik, hogy:

$$GP = 5\sqrt{5} \approx 11{,}18 \text{ cm},$$

tehát az EGP háromszög egyenlő szárú ($EP = GP$). Mivel EG a kocka lapátlója, ezért:

$$EG = 10\sqrt{2} \approx 14{,}14 \text{ cm}.$$





d) Az *LPE* derékszögű háromszögben:

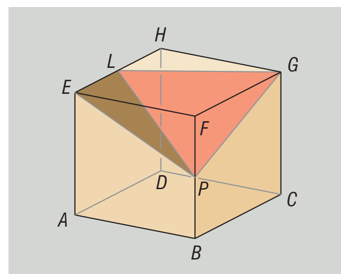
$$PL^2 = 5^2 + \left(5\sqrt{5}\right)^2 = 150,$$

azaz

$$PL = 5\sqrt{6} \approx 12{,}25 \text{ cm}.$$

Az *LPG* háromszög egyenlő szárú, hiszen

$$GP = GL = 5\sqrt{5} \approx 11{,}18 \text{ cm}.$$

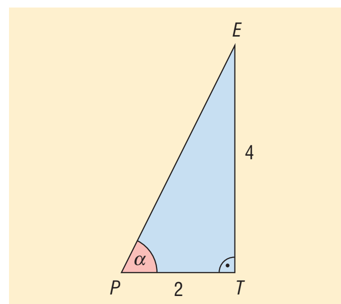


4192 Jelöljük *T*-vel az *E* pont *ABCD* síkra eső merőleges vetületét, valamint *P*-vel az *ADE* egyenlő szárú háromszög *E* csúcsából induló magasságának *AD* alapra illeszkedő talppontját. Az *EPT* derékszögű háromszögben *PT* = 2 m és *ET* = 4 m. Az *ADE* tetősík a vízszintes *ABCD* síkkal bezárt szögére:

$$\operatorname{tg}\alpha = 2,$$

$$\alpha \approx 63^\circ.$$

Az *ADE* és *BCF* tetősíkok a vízszintes síkkal 63°-os szöget zárnak be.



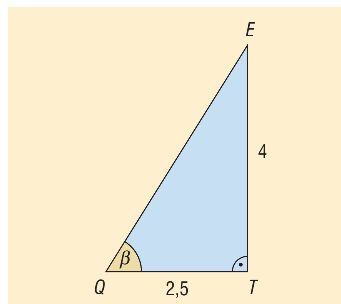
A másik két tetősík vízszintessel bezárt szögét hasonló módszerrel számolhatjuk ki. Ha *Q* jelöli az *ABFE* trapéz *E* csúcsából húzott magasság *AB* szakaszra illeszkedő talppontját, akkor az *EQT* háromszög befogói: *ET* = 4 m és *TQ* = 2,5 m.

A tetősík vízszintessel bezárt *β* szögére:

$$\operatorname{tg}\beta = \frac{4}{2{,}5},$$

$$\beta \approx 58^\circ.$$

Az *ABFE* és *DCFE* tetősíkok a vízszintes síkkal 58°-os szöget zárnak be.



4193 *a)* Az *EBD* háromszög minden oldala a kocka egy-egy lapátlója, ezért az $EBD_\triangle$ minden oldala $10\sqrt{2} \approx 14{,}14$ cm hosszúságú, így a háromszög valóban szabályos.

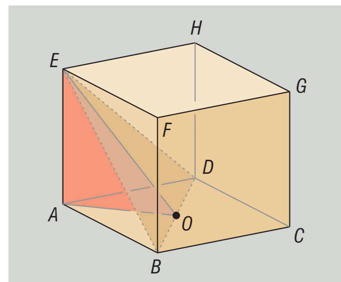
b) Az *ABCD* négyzet középpontját jelöljük *O*-val. Ekkor *AO* és *BD* a négyzet egy-egy átlójára illeszkedik, ezért merőlegesek egymásra.

Másrészt *EO* az *EBD* szabályos háromszög egyik magassága, ezért *EO* is merőleges *BD*-re.

Összefoglalva: *AO* és *EO* egyaránt merőleges az *ABCD* és *EBD* síkok metszésvonalára, ezért a két sík hajlásszöge éppen az *EOA*∢. Az *OEA* derékszögű háromszögben:

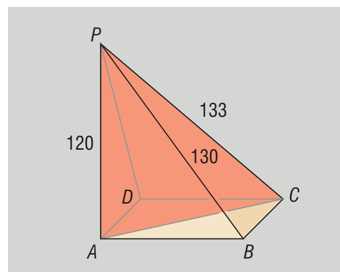
$$\operatorname{tg} EOA\sphericalangle = \frac{10}{\frac{10\sqrt{2}}{2}} = \sqrt{2},$$

$$EOA\sphericalangle \approx 54{,}74^\circ.$$



Az *ABCD* alaplap síkja az *EBD* síkkal 54,74°-os szöget zár be.





4194 *a)* A helikopter, amelynek helyét az ábrán P-vel jelöltük, illeszkedik az $ABCD$ téglalap síkjának A pontban emelt merőleges egyenesére. Ebből következően az AP egyenes merőleges az $ABCD$ sík minden egyenesére, így a BPA, CPA és DPA háromszögek mindegyike derékszögű. A $BPA_{\triangle}$-ből:

$$AB^2 = 130^2 - 120^2 = 2500,$$
$$AB = 50 \text{ m}.$$

A $CPA_{\triangle}$-ből:

$$AC^2 = 133^2 - 120^2 = 3289,$$
$$AC = 57{,}3 \text{ m}.$$

A szintén derékszögű $ABC_{\triangle}$-ből:

$$BC^2 = AC^2 - AB^2,$$
$$BC^2 = 3289 - 2500 = 789,$$
$$BC = 28{,}1 \text{ m}.$$

A leszállópálya oldalai 28,1 m, illetve 50 m hosszúak.

b) A $PDA_{\triangle}$-ből:

$$PD^2 = PA^2 + AD^2 = 120^2 + 789 = 15\,189,$$

amiből $PD = 123{,}2$ méter.

c) A feladat az $ACP\sphericalangle$-et kérdezi. A $CPA_{\triangle}$-ből:

$$\sin ACP\sphericalangle = \frac{120}{133},$$
$$ACP\sphericalangle \approx 64{,}5°.$$

A C pontból a helikopter körülbelül 64,5°-os emelkedési szögben látszik.

d) Tegyük fel, hogy a helikopter x méteres magasságban van, amikor a D pontból kétszer akkora szög alatt látszik, mint a C pontból. Ha a helikopter helyét ekkor is P jelöli, akkor

$$\operatorname{tg} ACP\sphericalangle = \frac{x}{AC} = \frac{x}{\sqrt{3289}} \quad \text{és} \quad \operatorname{tg} ADP\sphericalangle = \frac{x}{AD} = \frac{x}{\sqrt{789}}.$$

Mivel a feltételek szerint $ADP\sphericalangle = 2 \cdot ACP\sphericalangle$, ezért a megfelelő addíciós összefüggés alapján:

$$\operatorname{tg} ADP\sphericalangle = \frac{2 \cdot \operatorname{tg} ACP\sphericalangle}{1 - \operatorname{tg}^2 ACP\sphericalangle}.$$

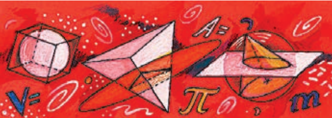
A kapott értékeket behelyettesítve:

$$\frac{x}{\sqrt{789}} = \frac{2 \cdot \dfrac{x}{\sqrt{3289}}}{1 - \left(\dfrac{x}{\sqrt{3289}}\right)^2}.$$

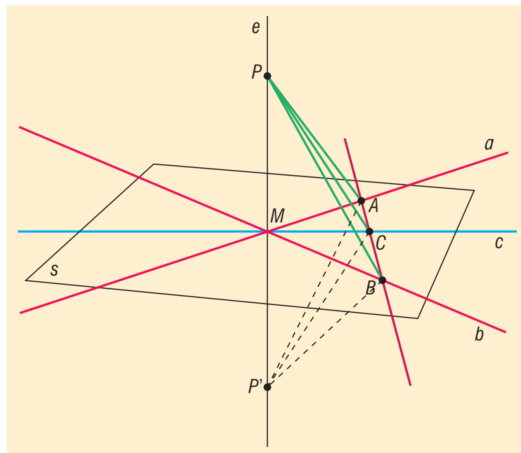
Rendezés után azt kapjuk, hogy:

$$x^2 = 3289 \cdot \left(1 - 2 \cdot \frac{\sqrt{789}}{\sqrt{3289}}\right),$$
$$x \approx 8{,}2 \text{ m}.$$

A helikopter 8,2 méter magasan van, amikor a D pontból kétszer akkora szögben látszik, mint a C pontból.



4195 Tegyük fel, hogy az e egyenes merőleges az S sík két metsző helyzetű egyenesére. Célunk annak igazolása, hogy az e egyenes az S sík minden egyenesére merőleges.



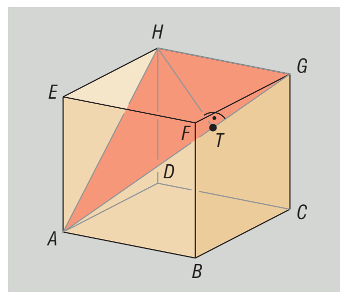
Két egyenes hajlásszöge nem változik, ha közülük az egyiket önmagával párhuzamosan eltoljuk, ezért „fogjuk meg” az S síkon azt a két egyenest, amelyre az e egyenes merőleges, majd toljuk el azokat úgy, hogy átmenjenek az S sík és az e egyenes M metszéspontján. Jelöljük az eltolt egyeneseket a-val és b-vel, ekkor az e egyenes merőleges a-ra és b-re is. Előző megjegyzésünk alapján elegendő megmutatni, hogy az e egyenes merőleges az összes olyan egyenesre, amely az S síkban halad, és átmegy az M ponton. Legyen c egy a-tól és b-től is különböző egyenes (ld. ábra). Megmutatjuk, hogy az e egyenes merőleges a c egyenesre.

Vegyünk fel az S síkban egy tetszőleges, de az M pontot nem tartalmazó egyenest, amely metszi az a, b és c egyenesek mindegyikét. A metszéspontokat jelölje rendre A, B és C. Vegyünk fel továbbá egy P (M-től különböző) pontot az e egyenesen, majd tükrözzük az M pontra, így kapjuk a P' pontot. Ekkor persze $MP = MP'$.

Vizsgáljuk meg a kialakuló ábrát. Az ábrában több egyenlő szárú háromszöget is felfedezhetünk. Mivel e és a merőlegesek egymásra, ezért a $PMA_\triangle$ és $P'MA_\triangle$ egybevágó (két-két oldal + általuk közbezárt szög), amiből adódik, hogy $PA = P'A$, így a $PP'A_\triangle$ valóban egyenlő szárú. Ugyanígy belátható, hogy egyenlő szárú a $PP'B_\triangle$ is.

Az eddigi eredményeinket összefoglalva láthatjuk, hogy $PA = P'A$ és $PB = P'B$. Ebből azonnal következik, hogy az $ABP_\triangle$ egybevágó az $ABP'_\triangle$-gel, hiszen oldalaik hossza páronként megegyezik. Az egybevágóság miatt a megfelelő szögeik is egyenlők, így például $PBC\sphericalangle = P'BC\sphericalangle$. Ebből adódóan újabb háromszögekről láthatjuk be, hogy egybevágóak: a $PBC_\triangle$ és $P'BC_\triangle$ ugyanis két-két oldalban ($PB = P'B$ és BC közös oldal), valamint az általuk bezárt szögükben megegyezik, ezért valóban egybevágóak. Ebből következik, hogy $PC = P'C$, azaz a $PP'C_\triangle$ egyenlő szárú. Mivel M a PP' alap felezőpontja, ezért CM a háromszög egyik magassága, amiből következik, hogy az e egyenes merőleges a c egyenesre. Éppen ezt kellett bizonyítanunk.

4196 *a)* A kocka GH éle merőleges az $ADHE$ lap síkjára, ezért merőleges annak minden egyenesére, így az $AGH_\triangle$ derékszögű, a derékszögű csúcs a H pontnál van.



A H pont AG testátlótól való távolsága megegyezik az $AGH_\triangle$ AG átfogójához tartozó HT magasságának hosszával (ld. ábra).

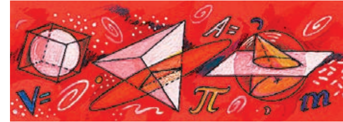
Az $AGH_\triangle$ oldalai:

$$HG = a, \quad AH = a\sqrt{2} \quad \text{és} \quad AG = a\sqrt{3}.$$

A háromszög területét kétféleképpen felírva:

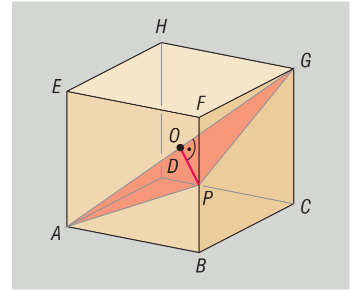
$$\frac{AH \cdot HG}{2} = \frac{AG \cdot HT}{2} \quad \Rightarrow \quad \frac{a\sqrt{2} \cdot a}{2} = \frac{a\sqrt{3} \cdot HT}{2} \quad \Rightarrow \quad HT = a\sqrt{\frac{2}{3}}.$$

A H pont az AG testátlótól $a\sqrt{\frac{2}{3}} = \frac{a\sqrt{6}}{3}$ egység távolságra van.



b) Az ABP derékszögű háromszögben:

$$AP^2 = a^2 + \left(\frac{a}{2}\right)^2 = \frac{5a^2}{4} \quad \Rightarrow \quad AP = \frac{a\sqrt{5}}{2}.$$



A $GPF_\triangle$ és az $APB_\triangle$ egybevágó (két-két oldal + általuk bezárt szög), ezért átfogóik ugyanakkorák, így:

$$AP = GP = \frac{a\sqrt{5}}{2}.$$

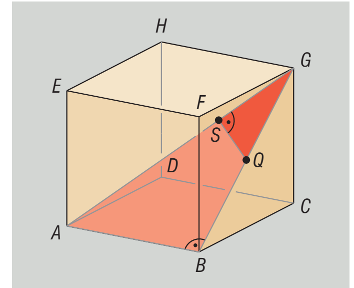
Az $AGP_\triangle$ tehát egyenlő szárú, az alaphoz tartozó magasságát (P és az AG testátló távolságát) az $APO_\triangle$-ből számíthatjuk:

$$OP^2 = AP^2 - AO^2 = \frac{5a^2}{4} - \frac{3a^2}{4} = \frac{a^2}{2} \quad \Rightarrow \quad OP = \frac{a}{\sqrt{2}} = \frac{a\sqrt{2}}{2}.$$

A P pont az AG testátlótól $\frac{a\sqrt{2}}{2}$ egység távolságra van.

Megjegyzés: Az OP szakasz hossza „ránézésre” is megmondható, hiszen OP párhuzamos a kocka HF lapátlójával, hossza pedig annak éppen fele.

c) A $BCGF$ lap középpontját Q, a Q pont merőleges vetületét az AG testátlón S jelöli az ábrán.



A Q pont AG testátlótól való távolsága megegyezik az SQ szakasz hosszával.

Figyeljük meg az ábra GQS és GAB háromszögeit. Mindkét háromszög derékszögű (a derékszögek S-nél, illetve B-nél vannak), továbbá a G csúcsaiknál lévő szögük közös.

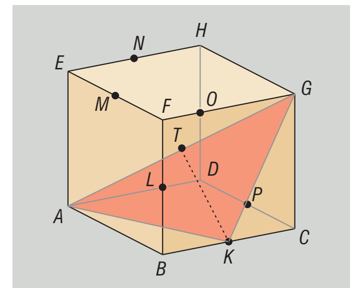
Ebből következik, hogy a két háromszög hasonló egymáshoz. A megfelelő oldalaik arányára:

$$\frac{SQ}{AB} = \frac{GQ}{AG} \quad \Rightarrow \quad \frac{SQ}{a} = \frac{\frac{a\sqrt{2}}{2}}{a\sqrt{3}} = \frac{\sqrt{2}}{2\sqrt{3}} = \frac{\sqrt{6}}{6} \quad \Rightarrow \quad SQ = \frac{a\sqrt{6}}{6}.$$

A $BCGF$ lap középpontja az AG testátlótól $\frac{a\sqrt{6}}{6}$ egység távolságra van.

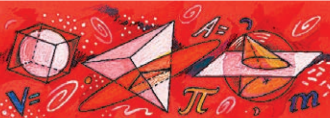
4197 *a)* Tekintsük az ábrán látható AGK háromszöget. A háromszög AK oldalát az AKB derékszögű háromszögből könnyen ki tudjuk számolni:

$$AK^2 = AB^2 + KB^2 = a^2 + \left(\frac{a}{2}\right)^2 \quad \Rightarrow \quad AK = \frac{a\sqrt{5}}{2}.$$



Mivel az $AKB_\triangle$ és $GKC_\triangle$ egybevágó, ezért $AK = GK$, így az $AGK_\triangle$ egyenlő szárú. Ebből következik, hogy ha az AG testátló felezőpontja T, akkor a KT szakasz az AGK egyenlő szárú háromszög magassága, és így merőleges az AG alapra. Ezt úgy is megfogalmazhatjuk, hogy a KT szakasz hossza megegyezik a K pont AG testátlótól való távolságával.

Könnyen belátható, hogy az L, M, N, O és P pontok mindegyike egy-egy, az $AGK_\triangle$-gel egybevágó háromszöget alkot az AG testátló két végpontjával, amiből következik, hogy a felsorolt pontok mindegyike ugyanakkora távolságra található a kocka AG testátlójától. Ez a távolság éppen a KT szakasz hossza.



b) A KT szakasz hosszát az ATK derékszögű háromszögből így számíthatjuk ki:

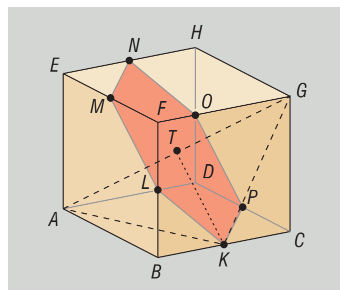
$$KT^2 = AK^2 - AT^2 = \frac{5}{4}a^2 - \frac{3}{4}a^2 = \frac{1}{2}a^2 \quad \Rightarrow \quad KT = \frac{a\sqrt{2}}{2}.$$

A K, L, M, N, O, P pontok mindegyike $\frac{a\sqrt{2}}{2}$ távolságra van az AG testátlótól.

Megjegyzés: A KT szakasz hosszát az ábra alapján is meghatározhatjuk. Mivel T a kocka középpontja, T a KN szakaszra esik, és azt felezi. KN hossza pedig megegyezik az $ABCD$ lapátlójának hosszával, vagyis $KN = a\sqrt{2}$. Így

$$KT = \frac{KN}{2} = \frac{a\sqrt{2}}{2}.$$

c) Mivel a $KGT_{\triangle}$-ben a T csúcsnál derékszög van, ezért a K pont illeszkedik a T pontban az AG testátlóra emelt merőleges síkra. A $KLMNOP$ hatszög összes csúcsa derékszögű háromszöget alkot a T és a G pontokkal, ezért az összes csúcs illeszkedik az említett síkra. Ez persze azt is jelenti, hogy a hatszög csúcsai egy síkban fekszenek. Ez a sík 90º-os szöget zár be a kocka AG testátlójával.

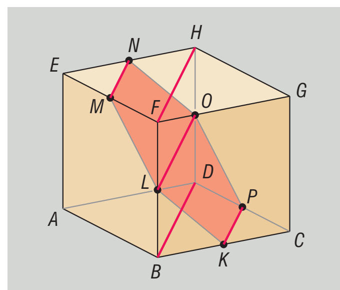


Egy másik bizonyítást is adunk arra vonatkozóan, hogy a $KLMNOP$ hatszög csúcsai egy síkban fekszenek.

Mivel az LO szakasz a $BDHF$ téglalap középvonala, ezért LO párhuzamos a kocka FH, illetve BD lapátlóival.

Az MN szakasz középvonala az $FHE_{\triangle}$-nek, ezért MN és FH szintén párhuzamos egymással.

Végül: KP a $BDC_{\triangle}$ középvonala, amiből következik, hogy KP párhuzamos a BD lapátlóval.



Összefoglalva: az LO, MN, KP szakaszok párhuzamosak egymással. Mivel két párhuzamos egyenes (szakasz) mindig egy síkban fekszik, ezért az L, O, M, N pontok, valamint az L, O, K, P pontok egy-egy síkban fekszenek. E két sík azonban megegyezik egymással, mivel a kocka, és így a $KLMNOP$ hatszög is középpontosan szimmetrikus az LO szakasz felezőpontjára, ami csak úgy lehetséges, ha a hat pont valóban egy síkon helyezkedik el.

d) Az *a)* feladatban már kiszámoltuk az AKG háromszög oldalait:

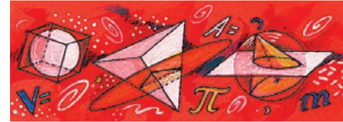
$$AK = KG = a\frac{\sqrt{5}}{2}, \qquad AG = a\sqrt{3}.$$

A koszinusztétel alapján:

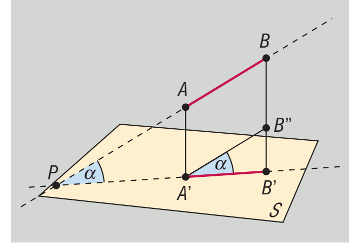
$$3a^2 = \frac{5}{4}a^2 + \frac{5}{4}a^2 - 2\cdot\left(a\cdot\frac{\sqrt{5}}{2}\right)\cdot\left(a\cdot\frac{\sqrt{5}}{2}\right)\cdot\cos AKG\sphericalangle,$$

amiből a műveletek elvégzése után:

$$\cos AKG\sphericalangle = -\frac{1}{5}.$$



4198 *a)* Ha $\alpha = 0°$, azaz az AB szakasz párhuzamos az S síkkal, akkor $A'B' = AB$, azaz $\frac{A'B'}{AB} = 1$. Ha $\alpha = 90°$, vagyis az AB szakasz merőleges az S síkra, akkor $A'B' = 0$, azaz $\frac{A'B'}{AB} = 0$.



Más esetekben húzzunk az A' ponton át párhuzamost az AB egyenessel, majd jelöljük B''-vel a BB' egyenessel való metszéspontját. Az $AA'B''B$ négyszög paralelogramma, ezért $A'B'' = AB$.

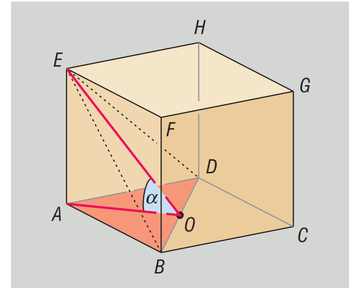
A $B''B'A'$ derékszögű háromszögben:

$$\cos\alpha = \frac{A'B'}{A'B''}, \quad \text{amiből} \quad \frac{A'B'}{AB} = \cos\alpha.$$

A fenti összefüggés azokban az esetekben is érvényes, ha $\alpha = 0°$, vagy $\alpha = 90°$.

b) Az *a)* feladat eredménye alapján az $A'B'$ szakasz hossza akkor minimális, ha $\alpha = 90°$. Az $A'B'$ szakasz hossza akkor maximális, ha $\alpha = 0°$.

4199 *a)* Az $EBD_\triangle$ szabályos, minden oldala a megadott $ABCDEFGH$ kocka lapátlója, azaz $10\sqrt{2} \approx 14{,}14$ cm.



A háromszög EO magasságának (ld. ábra) hossza:

$$EO = 10\sqrt{2} \cdot \frac{\sqrt{3}}{2} = 5\sqrt{6} \approx 12{,}25 \text{ cm}.$$

Az $EBD_\triangle$ területe:

$$T_{EBD} = \frac{10\sqrt{2} \cdot 5\sqrt{6}}{2} = 50\sqrt{3} \approx 86{,}60 \text{ cm}^2.$$

b) Az $EBD_\triangle$-nek az $ABCD$ síkra vonatkozó merőleges vetülete az $ABD_\triangle$.

c) Az ABD egyenlő szárú háromszög T területére:

$$T = \frac{BD \cdot AO}{2}.$$

Az OEA derékszögű háromszögben:

$$\cos\alpha = \frac{AO}{EO},$$

ha ezt behelyettesítjük a területképletbe, azt kapjuk, hogy:

$$T = \frac{BD \cdot EO \cdot \cos\alpha}{2} = \frac{BD \cdot EO}{2} \cdot \cos\alpha.$$

Vegyük észre, hogy az EO szakasz az $EBD_\triangle$ BD oldalához tartozó magassága, ezért az utolsó egyenlőség jobb oldalán szereplő tört éppen az $EBD_\triangle$ területe, tehát

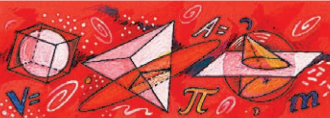
$$T = T_{EBD} \cdot \cos\alpha.$$

d) Az ABD egyenlő szárú derékszögű háromszög területe:

$$T = \frac{AB \cdot AD}{2} = \frac{10 \cdot 10}{2} = 50 \text{ cm}^2.$$

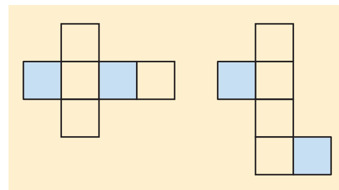
Így felhasználva az *a)* és *c)* feladatok eredményeit:

$$T = T_{EBD} \cdot \cos\alpha \quad \Rightarrow \quad 50 = 50\sqrt{3} \cdot \cos\alpha \quad \Rightarrow \quad \cos\alpha = \frac{1}{\sqrt{3}} \quad \Rightarrow \quad \alpha \approx 54{,}74°.$$



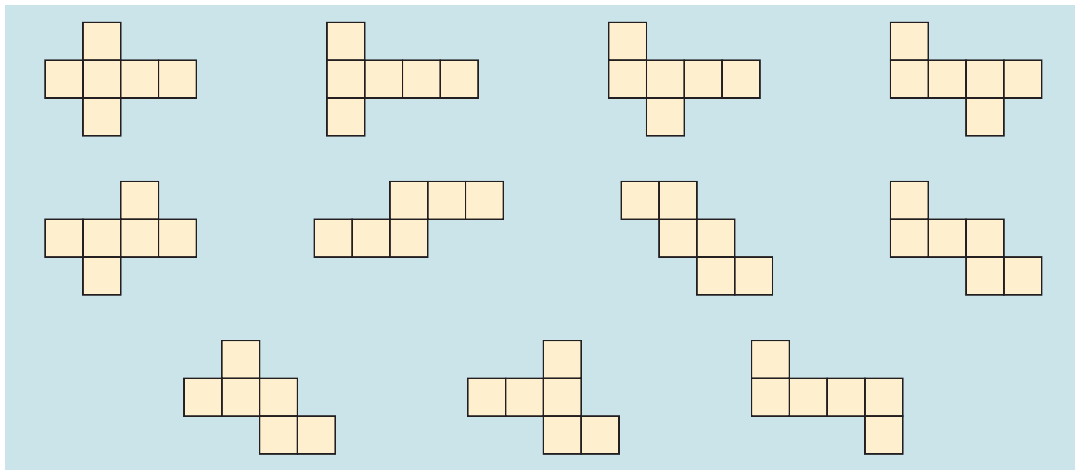
Testek osztályozása, szabályos testek – megoldások

4200 Az alábbi 2 ábra lehet egy kocka síkbeli hálózata. A szemközti lapokat színezéssel jelöltük meg.



4201 *a)* 24;
b) 24;
c) 8.

4202 Összesen 11 különböző síkbeli hálója van egy kockának.



4203 *a)* Barnabás maximum 21 darab kockát használhatott fel. Az ábra a tornyot felülnézetben mutatja, az egyes négyzetekbe azt írtuk, hogy ott hány kockát helyezett egymásra.

1	1	1	1
1	3	1	2
1	1	1	1
1	2	1	2

Oldalnézet

Elölnézet

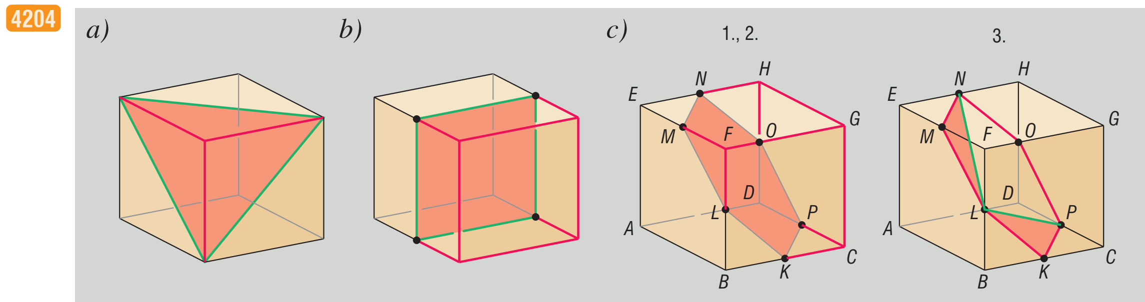
b) Lehetséges, hogy Barnabás a torony megépítéséhez pontosan 10 darab kockát használt fel. Egy ilyen torony felülnézeti képét az ábra mutatja.

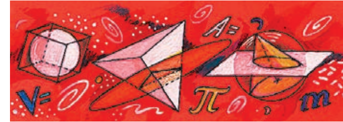
			1
	3		
			1
1	1	1	2

Oldalnézet

Elölnézet

4204





a) Szabályos háromszögben lehet a kockát metszeni, amint azt az előző ábra mutatja.

b) A kocka metszhető négyzetben.

c) A kockát lehet szabályos hatszögben metszeni.

Ennek igazolásához tekintsük az ábra szerinti 6 él felezőpontját, azaz a K, L, M, N, O és P pontokat. Megmutatjuk, hogy a felsorolt pontokat tartalmazó sík szabályos hatszögben metszi a kockát. Ehhez a következőket kell igazolnunk:

1. A hat pont egy síkon fekszik. Ezt közvetlenül igazoltuk a 4197. feladatban.
2. A $KLMNOP$ hatszög minden oldala egyenlő. Ez könnyen belátható, hiszen ha a kocka élét a jelöli, akkor a $KLMNOP$ hatszög minden oldala átfogója egy-egy olyan egyenlő szárú derékszögű háromszögnek, amelynek befogói $\frac{a}{2}$ hosszúságúk. Például a KL szakasz a KLB, az LM szakasz az LMF derékszögű háromszög átfogója. Ebből következik, hogy a $KLMNOP$ hatszög minden oldala $\frac{a\sqrt{2}}{2}$ hosszúságú.
3. A $KLMNOP$ hatszög minden szöge egyenlő. Megmutatjuk, hogy például a K és M csúcsoknál található szögek ugyanakkorák. Ehhez tekintsük az LPK és LNM háromszögeket. Mindkét háromszög egyenlő szárú, száraik egyenlő hosszúak, továbbá $LP = LN$, hiszen mindkét szakasz a kocka két kitérő helyzetű élének felezőpontját köti össze (ld. 4187. feladat). Ebből adódik, hogy a két háromszög egybevágó, ezért megfelelő szögeik is megegyeznek, így a $KLMNOP$ hatszögben a K és M csúcsoknál ugyanakkora szögek vannak.

Ezzel bebizonyítottuk, hogy a $KLMNOP$ hatszög szabályos.

Megjegyzés: A 4235. feladatban egy másik módszert is találhatunk annak igazolására, hogy a hatszög szögei egyenlők.

d) A kocka szabályos nyolcszögben nem metszhető, mert csak 6 lapja van, így síkmetszeteinek legfeljebb 6 oldala lehet.

4205 22,5 cm.

4206 $6\sqrt{3} \approx 10{,}4$ cm.

4207 $\frac{12\sqrt{2}}{2} \approx 8{,}49$ cm.

4208 *a)* A levágott testet egy szabályos háromszög és 3 egyenlő szárú derékszögű háromszög határolja.

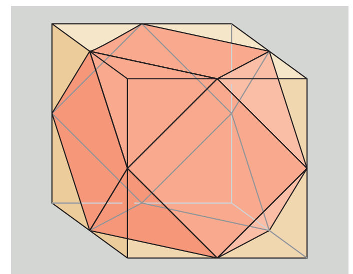
b) A levágott test egy szabályos háromoldalú gúla (tetraéder).

c) A visszamaradó testnek 7 lapja, 10 csúcsa és 15 éle van.

d) Mivel $10 + 7 = 15 + 2$, vagyis a csúcsok és lapok számának összege 2-vel nagyobb az élek számánál, ezért az Euler-féle poliédertétel teljesül a visszamaradó testre.

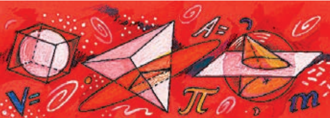
e) A testet 3 négyzet, egy szabályos háromszög, valamint 3 egybevágó ötszög határolja.

4209 *a)* A visszamaradó test az ábrán látható. A testet 6 négyzet, valamint 8 szabályos háromszög határolja.

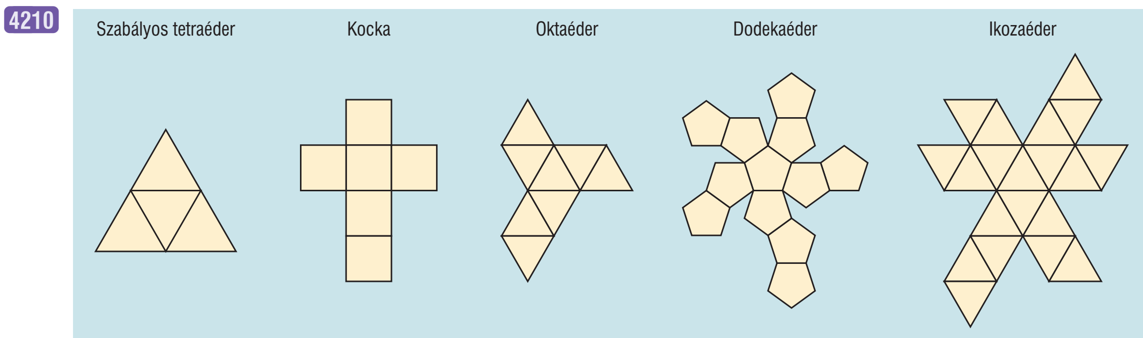


b) A testnek 14 lapja, 12 csúcsa, valamint 24 éle van.

c) Mivel $12 + 14 = 24 + 2$, vagyis a csúcsok és lapok számának összege 2-vel nagyobb az élek számánál, ezért az Euler-féle poliédertétel teljesül a visszamaradó testre.



4210



4211

Test neve	Lapok száma	Csúcsok száma	Élek száma
Kocka	6	8	12
Szabályos tetraéder	4	4	6
Oktaéder	8	6	12
Háromszög alapú hasáb	5	6	9
Háromszög alapú gúla	4	4	6
Négyzet alapú hasáb	6	8	12
Négyzet alapú gúla	5	5	8
Ötszög alapú hasáb	7	10	15
Ötszög alapú gúla	6	6	10
Tizenkétszög alapú hasáb	14	24	36
Tizenkétszög alapú gúla	13	13	24

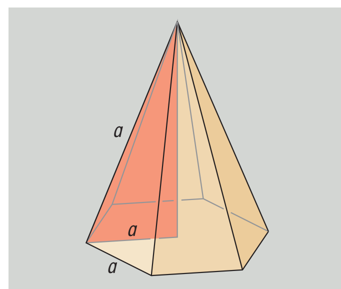
A csúcsok és lapok számának összege minden esetben 2-vel nagyobb az élek számánál.

4212 A hasábnak 6 oldallapja van.

4213 A gúlának 12 oldallapja van.

4214 *a)* $(n-1)\cdot 720°$; *b)* $(n-1)\cdot 360°$.

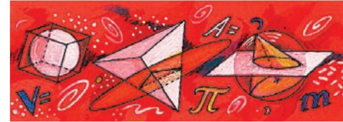
4215 Ha a szabályos hatoldalú gúla oldallapjai szabályos háromszögek lennének, akkor az ábrán a-val jelölt szakaszok hossza megegyezne. Ekkor a narancsszínnel jelölt derékszögű háromszög átfogója ugyanakkora lenne, mint az egyik befogója, ami lehetetlen. Ebből következik, hogy a szabályos hatoldalú gúla oldallapjai nem lehetnek szabályos háromszögek.



4216 *a)* 73,74°; *b)* 73,74°;
c) 118,07°; *d)* 60°.

4217 Az alkotó és az alaplap síkja által bezárt szöget α, a kúp nyílásszögét φ jelöli.
a) $\alpha \approx 67{,}38°$, $\varphi \approx 45{,}24°$; *b)* $\alpha \approx 67{,}38°$, $\varphi \approx 45{,}24°$; *c)* $\alpha \approx 53{,}13°$, $\varphi \approx 73{,}74°$.

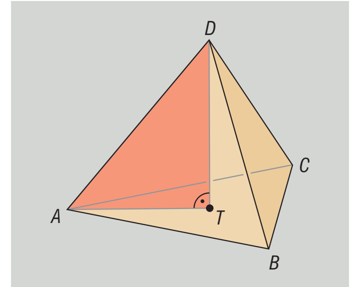
4218 60°.



4219 *a)* 54,74°; *b)* 75,04°.

4220 63,43°.

4221 Az $ABCD$ szabályos tetraéder D csúcsából induló magasságának talppontját T-vel jelöltük. Mivel a T pont egyben az $ABC_\triangle$ súlypontja is, ezért az AT szakasz az $ABC_\triangle$ súlyvonalának $\frac{2}{3}$-szorosa. A szabályos háromszög súlypontja és magasságpontja egybeesik, ezért az ABC szabályos háromszög súlyvonalának hossza megegyezik a magasságának hosszával, így:



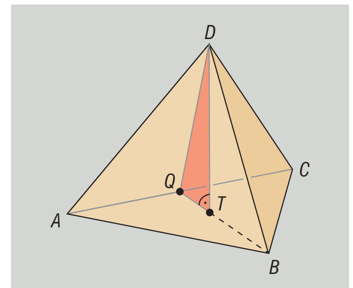
$$AT = \frac{2}{3} \cdot \frac{a\sqrt{3}}{2} = \frac{a\sqrt{3}}{3}.$$

Az $ADT_\triangle$ derékszögű, hiszen DT merőleges az ABC alaplap síkjára, így merőleges annak minden egyenesére is. Pitagorasz tételéből következik, hogy:

$$DT^2 = AD^2 - AT^2 = a^2 - \left(\frac{a\sqrt{3}}{3}\right)^2 = \frac{2a^2}{3} \quad \Rightarrow \quad DT = a\sqrt{\frac{2}{3}}.$$

Az a élű szabályos tetraéder csúcsa a szemközti laptól $a\sqrt{\frac{2}{3}} = \frac{a\sqrt{6}}{3}$ távolságra van.

4222 Az $ABCD$ szabályos tetraéder ABC és ACD lapjainak hajlásszögét a két lap közös egyenesére (AC) a síkokon belül emelt merőlegesek hajlásszögeként számolhatjuk. Mivel az ABC és ACD háromszögek szabályosak, ezért az AC oldalhoz tartozó magasságaik az AC szakasz Q felezőpontjában metszik egymást. Ebből következik, hogy a két lap hajlásszöge megegyezik a $DQB\sphericalangle$-gel (ld. ábra).



Ha az $ABCD$ tetraéder éleinek hossza a, és a $DQB_\triangle$ D-ből induló magasságvonalának talppontja T, akkor a 4221. feladat eredménye alapján:

$$DT = a\sqrt{\frac{2}{3}}.$$

A DQT derékszögű háromszögben:

$$\sin(DQB\sphericalangle) = \frac{DT}{DQ} = \frac{a\sqrt{\frac{2}{3}}}{DQ}.$$

A DQ szakasz a magasság az ACD szabályos háromszögben, ezért:

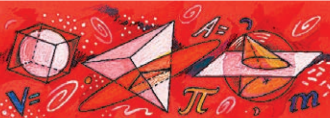
$$DQ = a\frac{\sqrt{3}}{2},$$

amiből következik, hogy:

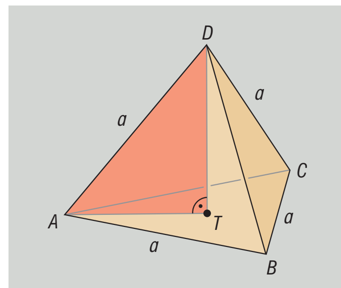
$$\sin(DQB\sphericalangle) = \frac{a\sqrt{\frac{2}{3}}}{a\frac{\sqrt{3}}{2}} = \frac{2\sqrt{2}}{3},$$

$$DQB\sphericalangle \approx 70{,}53°.$$

A szabályos tetraéder két szomszédos lapja 70,53°-os szöget zár be egymással.



4223 Ha az $ABCD$ szabályos tetraéder éleinek hossza a, és a D csúcsából induló magasságának talppontja T, akkor az AD él és az ABC alaplap által bezárt szög megegyezik a $DAT\sphericalangle$-gel.



A 4221. feladat eredménye alapján:

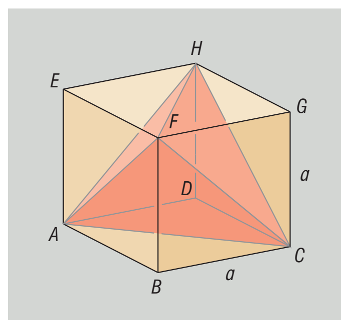
$$DT = a\sqrt{\frac{2}{3}},$$

így az ADT derékszögű háromszögben:

$$\sin(DAT\sphericalangle) = \frac{a\sqrt{\frac{2}{3}}}{a} = \sqrt{\frac{2}{3}} \quad \Rightarrow \quad DAT\sphericalangle \approx 54{,}74^\circ.$$

A szabályos tetraéder éle az élt nem tartalmazó lapjával $54{,}74^\circ$-os szöget zár be.

4224 Az $ABCDEFGH$ kocka két kitérő helyzetű lapátlójának végpontjai egy szabályos tetraéder csúcsai. Példaként tekintsük az A, C, H és F pontokat, és húzzuk meg az ábrán is látható lapátlókat. A kialakuló $ACFH$ tetraéder minden éle a kockának egy-egy lapátlója, ezért a tetraédert négy szabályos háromszög határolja. Ebből következik, hogy az $ACFH$ tetraéder szabályos.



Ha a kocka éle a, akkor a keletkező szabályos tetraéder éleinek hossza: $a\sqrt{2}$.

4225 A 4224. feladatban megmutattuk, hogy a szabályos tetraéder kockába foglalható (ld. 4224. feladat ábrája). Azt is beláttuk, hogy a szabályos tetraéder éle a tartalmazó kocka élének $\sqrt{2}$-szöröse, ezért ha a kocka éle x, akkor $x\sqrt{2} = a$, amiből:

$$x = \frac{a\sqrt{2}}{2}.$$

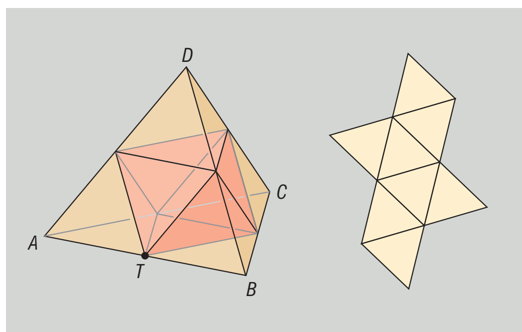
Az a élű szabályos tetraédert tartalmazó kocka éle tehát $\frac{a\sqrt{2}}{2}$.

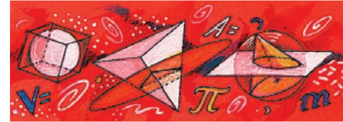
A 4224. feladat ábráján szereplő szabályos tetraéder AC és FH éle kitérő helyzetűek, távolságuk éppen a kocka élének hosszával egyenlő, azaz $\frac{a\sqrt{2}}{2}$. A tartalmazó kocka AC és FH lapátlója merőleges egymásra, ezért a szabályos tetraéder kitérő helyzetű élei is merőlegesek egymásra.

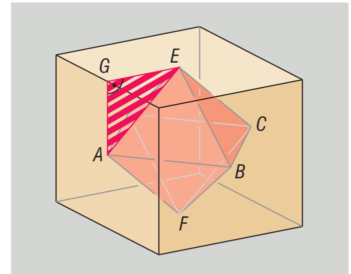
4226 *a)* A tetraéder „csonkolása" után az ábrán látható testet kapjuk. A másik ábra a test síkbeli hálóját mutatja.

b) A visszamaradó testnek 8 lapja, 6 csúcsa és 12 éle van. Megjegyezzük, hogy egy szabályos oktaéder marad vissza a tetraéderből.

c) Mivel $8 + 6 = 12 + 2$, ezért a lapok és csúcsok számának összege 2-vel nagyobb az élek számánál, így az Euler-féle poliédertétel teljesül a testre.







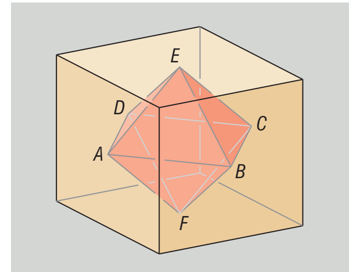
4227 *a)* A keletkező *FABCDE* test minden éle ugyanakkora hosszúságú, hiszen bármely éle a kocka két szomszédos lapjának középpontját köti össze (ld. ábra). Ha az *A* és *E* pontokat tartalmazó lapok közös élének felezőpontja *G*, akkor az *AEG* derékszögű háromszögben:

$$AE^2 = AG^2 + EG^2 = 10^2 + 10^2 \Rightarrow AE = 10\sqrt{2} \approx 14{,}14 \text{ cm}.$$

Az *FABCDE* test minden éle 14,14 cm hosszúságú.

b) A testnek 8 lapja, 6 csúcsa és 12 éle van.

c) Az *FABCDE* testet szabályos háromszögek határolják. A keletkező test egy szabályos oktaéder.

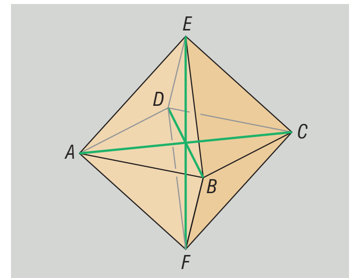


4228 Az ábrán látható *FABCDE* szabályos oktaéderben példaként megvizsgáljuk, hogy az *AB* él a többi éllel mekkora szöget zár be. A szabályos oktaéder lapjai szabályos háromszögek, így az *AB* él a következő szakaszokkal 60°-os szöget zár be: *AF*, *BF*, *AE*, *BE*.

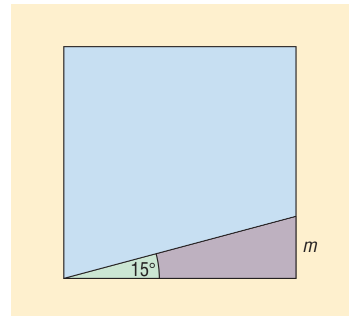
A 4227. feladatban láttuk, hogy a szabályos oktaéder csúcsai egy kocka lapjainak középpontjai (ld. ábra). Ebből adódóan az *ABCD* négyszög négyzet, ezért az *AB* él a *DC* éllel párhuzamos (így azzal 0°-os szöget zár be), továbbá a következő élekre merőleges (így azokkal 90°-os szöget zár be): *AD*, *BC*.

A hiányzó 4 él (*DF*, *CF*, *DE*, *CE*) mindegyike kitérő helyzetű az *AB* éllel. Kitérő egyenesek (szakaszok) hajlásszöge alatt a tér egy tetszőleges pontján átmenő, velük párhuzamos, metsző helyzetű egyenesek hajlásszögét értjük. Vegyük észre, hogy a *DC* él párhuzamos az *AB* éllel, ezért az *AB* és *DE* élek hajlásszöge megegyezik a *DC* és *DE* élek hajlásszögével, ami 60°. Ugyanígy belátható, hogy *AB* a másik 3 hiányzó éllel is 60°-os szöget zár be.

A szabályos oktaéder két éle tehát a következő szögek valamelyikét zárja be egymással: 0°, 60° és 90°.



4229 A szabályos oktaédernek 3 testátlója van, amelyeket az ábrán zölddel jelöltünk meg. Mindegyik testátló egy-egy 10 cm oldalú négyzetnek az átlója (pl. az *AC* testátló az *ABCD* négyzet átlója), ezért hosszuk $10\sqrt{2} \approx 14{,}14$ cm. Bármely két testátlót is választjuk ki, azok biztosan egy négyzet átlói (pl. az *AC* és *BD* testátlók az *ABCD* négyzet átlói), ezért a szabályos oktaéder bármely két testátlója merőleges egymásra.



4230 *a)* Az ábrán látható derékszögű háromszögben:

$$\text{tg}\,15° = \frac{m}{5}, \quad \text{amiből} \quad m \approx 1{,}34 \text{ cm}.$$

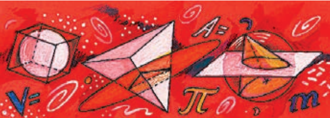
Az ék „magassága” körülbelül 1,34 cm.

b) A kockát egy téglalapban metszettük el, melynek egyik (az ábrán látható négyzet síkjára merőleges) oldala 5 cm, a másik oldala pedig:

$$\frac{5}{\cos 15°} \approx 5{,}18 \text{ cm}.$$

A kocka síkmetszetének területe megközelítőleg 25,90 cm^2.

c) A kockából egy derékszögű háromszög, illetve egy derékszögű trapéz alapú egyenes hasáb keletkezik. Az ábra a két test alaplapját mutatja.



4231 *a)* Ági a dobótetraéderrel 4, a dobóoktaéderrel 8, a dobódodekaéderrel 12, a dobóikozaéderrel pedig 20 különböző számot dobhat. A 4 testtel összesen $4 \cdot 8 \cdot 12 \cdot 20 = 7680$-féle dobás végezhető.

A prímszámok 1-től 20-ig: 2, 3, 5, 7, 11, 13, 17, 19. Ahhoz, hogy mindegyik testtel prímszámot dobjunk, a tetraéderrel 2, az oktaéderrel 4, a dodekaéderrel 5, míg az ikozaéderrel 8 számot dobhatunk. Ezért a prímszámok dobása szempontjából kedvező esetek száma $2 \cdot 4 \cdot 5 \cdot 8 = 320$, annak a valószínűsége pedig, hogy mindegyik testtel prímszámot dobunk:

$$\frac{320}{7680} \approx 0{,}0417.$$

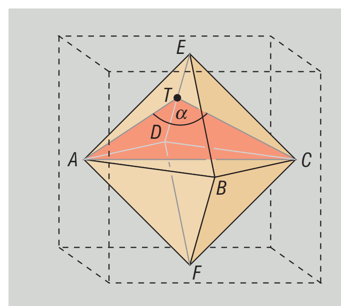
b) Mivel $4 + 8 + 12 + 20 = 44$, ezért a dobott pontok összege az alábbi esetekben lehet legalább 42.

1. A pontok összege 44. Ez csak úgy lehetséges, ha Ági mindegyik testtel a lehető legnagyobb számot dobja. A pontok összege 1 esetben lehet 44.
2. A dobott pontok összege 43. Ekkor Áginak egy kivételével mindegyik testtel a lehető legnagyobb számot kell dobnia, a maradék testtel pedig a legnagyobb számnál 1-gyel kisebbet. Attól függően, hogy melyik testtel nem dob maximális értéket, ez az eset 4-féleképpen következhet be.
3. A dobott pontok összege 42. Ekkor vagy két testtel dob 1-gyel kisebbet, mint a maximális érték, vagy egy testtel dob 2-vel kisebbet a maximumnál, míg a többi testtel a legnagyobb értéket kell dobnia. Az első változat $\binom{4}{2} = 6$-féleképpen, a második pedig 4-féleképpen következhet be.

A kedvező esetek száma tehát: $1 + 4 + 10 = 15$, annak a valószínűsége pedig, hogy legalább 42 a dobott pontok összege:

$$\frac{15}{7680} \approx 0{,}00195.$$

4232 Az *FABCDE* szabályos oktaéder *ADE* és *CDE* lapjainak hajlásszögét fogjuk kiszámolni. A térben való jobb tájékozódás érdekében az ábrán megjelenítettük azt a kockát is, amelynek középpontjai az oktaéder csúcspontjai. A két lap hajlásszöge megegyezik az *ADE*, valamint a *CDE* szabályos háromszögek *AT*, illetve *CT* magasságainak hajlásszögével. A keresett szöget például az *ACT* egyenlő szárú háromszög oldalaiból számolhatjuk ki.



Ha az oktaéder minden éle a hosszúságú, akkor az *AT*, illetve *CT* magasság: $AT = CT = \frac{a\sqrt{3}}{2}$ (egy-egy a oldalú szabályos háromszög magasságai), míg $AC = a\sqrt{2}$ (az a oldalú *ABCD* négyzet átlója). Ha a két szomszédos lap hajlásszögét α-val jelöljük, akkor az $ACT_{\triangle}$-ben a koszinusztétel alapján:

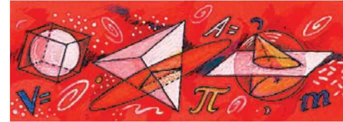
$$AC^2 = AT^2 + CT^2 - 2 \cdot AT \cdot CT \cdot \cos\alpha,$$

$$2a^2 = \frac{3a^2}{4} + \frac{3a^2}{4} - 2 \cdot \frac{a\sqrt{3}}{2} \cdot \frac{a\sqrt{3}}{2} \cdot \cos\alpha.$$

Rendezés után:

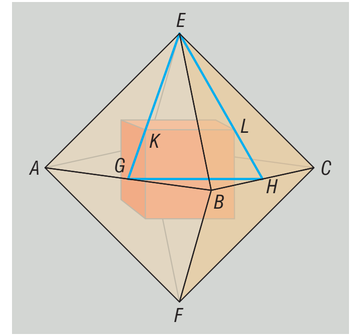
$$\cos\alpha = -\frac{1}{3}, \qquad \text{amiből} \qquad \alpha \approx 109{,}47°.$$

A szabályos oktaéder két szomszédos lapja 109,47°-os szöget zár be egymással.



4233 *a)* Az $FABCDE$ szabályos oktaédert, valamint a lapjait „érintő” beírt kockát az ábra mutatja (a D pont takarás miatt nem látható). A szobor magassága megegyezik az FE szakasz hosszával. Mivel FE az $AFCE$ négyzet átlója, a négyzet oldala pedig 1 méter, ezért a szobor magassága:

$$\sqrt{2} \approx 1{,}41 \text{ m}.$$



b) Feladatunk a szabályos oktaéderbe írt kocka KL élének kiszámítása. A feltételek alapján K és L az ABE, illetve a BCE szabályos háromszögek középpontja. Az ábrán G-vel jelöltük az AB, H-val pedig a BC szakasz felezőpontját.

Vizsgáljuk meg a $GHE_\triangle$-et. Mivel GE és HE magasság egy-egy 1 m oldalú szabályos háromszögben, ezért:

$$GE = HE = \frac{\sqrt{3}}{2} \text{ (m)}.$$

Ebből következik, hogy a $GHE_\triangle$ egyenlő szárú. A háromszög GH alapja középvonal a szintén egyenlő szárú $ACB_\triangle$-ben, ezért:

$$GH = \frac{AC}{2} = \frac{\sqrt{2}}{2} \text{ (m)},$$

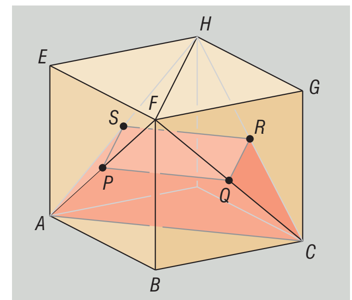
hiszen AC pedig egy 1 m oldalú négyzet átlója (természetesen az $ABCD$ négyzetről van szó).

Végül vegyük alaposan szemügyre a $KLE_\triangle$-et. Mivel K az $ABE_\triangle$, L pedig a $BCE_\triangle$ súlypontja, ezért e pontok 2 : 1 arányban osztják a megfelelő háromszögek EG, illetve EH súlyvonalait. Ebből azonban az is következik, hogy a $GHE_\triangle$-et az E középpontú $\frac{2}{3}$ arányú középpontos hasonlóság éppen a $KLE_\triangle$ viszi át. Az említett középpontos hasonlóság a GH szakaszt a KL szakaszba viszi, ezért:

$$KL = \frac{2}{3} \cdot GH = \frac{2}{3} \cdot \frac{\sqrt{2}}{2} = \frac{\sqrt{2}}{3} \text{ (m)}.$$

Az oktaéder belsejében elhelyezett kocka éleinek hossza körülbelül 0,47 m.

4234 A jobb térbeli tájékozódás érdekében az $ACHF$ szabályos tetraédert belefoglaltuk az $ABCDEFGH$ kockába az ábrán látható módon (a D pont takarás miatt nem látszik). A tetraéder AF, CF, CH és AH éleinek felezőpontja rendre P, Q, R és S. Megmutatjuk, hogy a $PQRS$ négyszög rombusz, azaz a szabályos tetraéder metszhető rombuszban.



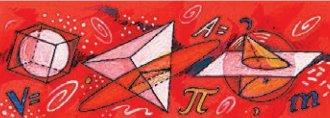
Mivel a PQ szakasz középvonal az $ACF_\triangle$-ben, ezért:

$$PQ = \frac{AC}{2}, \qquad (1)$$

továbbá PQ párhuzamos AC-vel. Hasonló megfontolással láthatjuk, hogy SR középvonal az $ACH_\triangle$-ben, amiből következik, hogy:

$$SR = \frac{AC}{2}, \qquad (2)$$

továbbá SR is párhuzamos AC-vel. Összefoglalva: PQ és SR ugyanazzal a szakasszal párhuzamos, amiből következik, hogy PQ és SR egymással is párhuzamos. Másrészt $PQ = SR$, így végül az is következik, hogy a $PQRS$ négyszög paralelogramma.



Ugyanígy belátható, hogy QR középvonal az $FHC_{\triangle}$-ben, amiből következik, hogy:

$$QR = \frac{FH}{2}, \qquad (3)$$

illetve PS középvonal az $FHA_{\triangle}$-ben, amiből pedig:

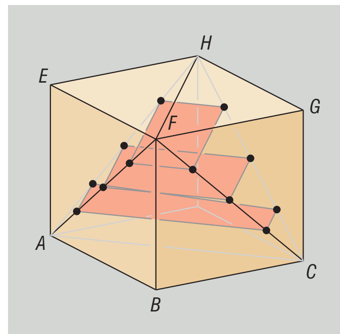
$$PS = \frac{FH}{2}. \qquad (4)$$

Az (1), (2), (3) és (4) egyenlőségek alaposabb vizsgálata után megállapíthatjuk, hogy a $PQRS$ négyszög minden oldala az $ABCDEFGH$ kocka valamelyik lapátlójának a felével egyenlő hosszúságú.

Mivel a kockának minden lapátlója ugyanakkora, ezért ugyanez érvényes a $PQRS$ négyszög oldalaira is. Ebből már következik, hogy a $PQRS$ paralelogramma valóban rombusz.

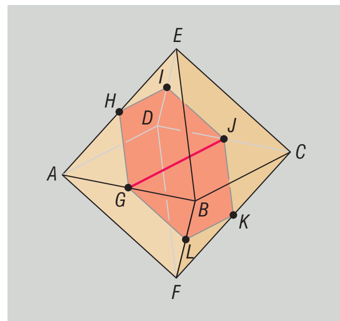
Megjegyzés: A $PQRS$ sík párhuzamos az $ABCDEFGH$ kocka $ABCD$, illetve $EFGH$ lapjaival, továbbá a tetraéder FH és AC éleivel.

Az alábbi ábra azt mutatja, hogy a szabályos tetraéder egyik élével párhuzamos síkok mind paralelogrammában metszik a tetraédert (amennyiben metszik).

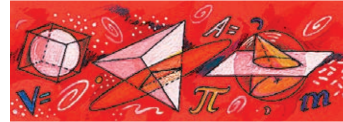


4235 Megmutatjuk, hogy a szabályos oktaédert lehet szabályos hatszögben metszeni.

Jelöljük az $FABCDE$ szabályos oktaéder AB, AE, DE, DC, CF és BF éleinek felezőpontját az ábra szerint a G, H, I, J, K, L pontokkal. A $GHIJKL$ hatszög szabályos. Ennek igazolásához az alábbiakat kell végiggondolnunk.

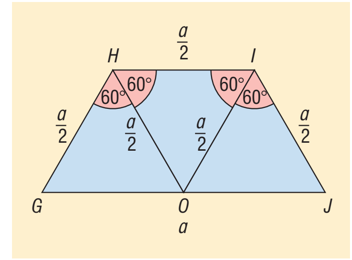


1. A hat pont egy síkban fekszik. A HI szakasz középvonal az ADE háromszögben, ezért HI és AD párhuzamos egymással. A GJ szakasz középvonal az $ABCD$ négyzetben, ezért GJ szintén párhuzamos AD-vel. Ez azt is jelenti, hogy GJ és HI egyaránt párhuzamos az oktaéder AD élével, amiből következik, hogy HI és GJ párhuzamos egymással. Hasonlóan mutatható meg, hogy GJ és LK szintén párhuzamos egymással. Ekkor azonban a GJ és a HI, valamint a GJ és az LK szakaszok párhuzamosak egymással, ezért végpontjaik, azaz a G, J, H, I, valamint a G, J, L, K pontok egy-egy síkra illeszkednek. E két sík azonban egybeesik egymással, hiszen a szabályos oktaéder, és így a $GHIJKL$ hatszög is középpontosan szimmetrikus a GJ szakasz felezőpontjával, ami csak úgy lehetséges, ha a $GHIJKL$ hatszög csúcsai egy síkban fekszenek.
2. A $GHIJKL$ hatszög oldalai egyenlők. Vegyük észre, hogy a hatszög minden oldala középvonal a szabályos oktaéder egy-egy lapján: például IH középvonal az ADE háromszögben, GH középvonal a BEA háromszögben és így tovább. Ebből adódik, hogy a hatszög minden oldala feleakkora, mint az $FABCDE$ szabályos oktaéder éle, így a hatszög minden oldala egyenlő hosszúságú.



3. A $GHIJKL$ hatszög minden szöge 120º-os. Példaként megmutatjuk ezt a hatszög H és I csúcsainál lévő szögekről. Ha a szabályos oktaéder éleinek hossza a, akkor a $GJIH$ trapéz oldalainak hossza (ld. ábra):

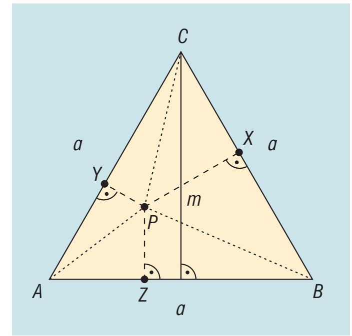
$$HI = IJ = GH = \frac{a}{2}, \quad \text{illetve} \quad GJ = a.$$



Ha a trapéz rövidebb alapjának végpontjait (H és I) összekötjük a hosszabb alap felezőpontjával (az ábrán az O pont), akkor ezzel a trapézt három szabályos háromszögre bonthatjuk fel, amiből következik, hogy a H és I csúcsoknál valóban 120º-os szögek vannak.

Ezzel bebizonyítottuk, hogy a $GHIJKL$ sík a szabályos oktaédert valóban szabályos hatszögben metszi.

4236 *a)* Kössük össze a P pontot az ABC szabályos háromszög csúcsaival, ezzel a háromszöget három kisebb háromszögre, a BCP, CAP, illetve ABP háromszögekre bontottuk. A három keletkező háromszögnek egy-egy oldala éppen a hosszúságú. Vegyük észre még, hogy a PX, PY, PZ szakaszok mindegyike az a hosszúságú oldalhoz tartozó magasság az egyes háromszögekben. Ezek alapján az ABC háromszög területe:



$$T_{ABC} = T_{BCP} + T_{CAP} + T_{ABP},$$

$$T_{ABC} = \frac{a \cdot PX}{2} + \frac{a \cdot PY}{2} + \frac{a \cdot PZ}{2},$$

$$\frac{a \cdot m}{2} = \frac{a}{2} \cdot (PX + PY + PZ),$$

ahol m az ABC háromszög magasságának hosszát jelöli. Egyszerűsítés után azt kapjuk, hogy:

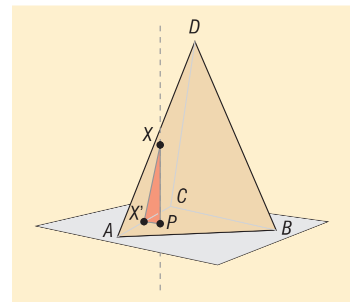
$$PX + PY + PZ = m.$$

Mivel a jobb oldal nem függ a P pont kiválasztásától, ezért bebizonyítottuk, hogy a PX, PY, PZ szakaszok hosszának összege (a P pont helyzetétől függetlenül) az ABC háromszög magasságával egyenlő.

Megjegyzés: A $PX + PY + PZ$ összeget a szabályos háromszög oldalával is kifejezhetjük. Ha a háromszög oldalainak hossza a, akkor:

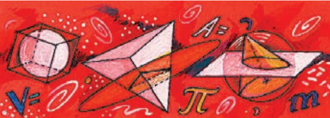
$$PX + PY + PZ = \frac{a\sqrt{3}}{2}.$$

b) Az ábra jelöléseinek megfelelően válasszuk ki az $ABCD$ szabályos tetraéder ABC alaplapjának belsejében a P pontot. Tegyük fel, hogy a P pontban az ABC síkra emelt merőleges egyenes az ACD lap síkját az X pontban metszi. Jelöljük X'-vel az X pontnak az ACD szabályos háromszög AC oldalára eső merőleges vetületét (ld. ábra).



Ha a szabályos tetraéder két szomszédos lapjának hajlásszögét α-val jelöljük, akkor az $XX'P$ derékszögű háromszögben $XX'P\sphericalangle = \alpha$ teljesül. Az $XX'P$ derékszögű háromszögben így:

$$\text{tg}\,\alpha = \frac{PX}{PX'}, \quad \text{amiből} \quad PX = PX' \cdot \text{tg}\,\alpha.$$



Előző gondolatmenetünkben nem volt lényeges szerepe annak, hogy az X pont az ACD lap síkjára illeszkedik. Ezért hasonló megfontolások után azt kapjuk, hogy ha a P pontban az ABC lap síkjára emelt merőleges egyenes a CBD, illetve ABD síkokkal való metszéspontja Y és Z, továbbá Y' és Z' e két pont merőleges vetülete az ABC háromszög megfelelő oldalára, akkor:

$$PY = PY' \cdot \operatorname{tg}\alpha \quad \text{és} \quad PZ = PZ' \cdot \operatorname{tg}\alpha.$$

Ebből következik, hogy:

$$PX + PY + PZ = \operatorname{tg}\alpha \cdot (PX' + PY' + PZ').$$

Mivel a P pont az ABC szabályos háromszög belsejében fekszik, továbbá a PX', PY' és a PZ' szakaszok merőlegesek a háromszög egy-egy oldalára, ezért az *a)* feladat eredményét felhasználva:

$$PX' + PY' + PZ' = m,$$

ahol m az ABC háromszög magassága. Összefoglalva:

$$PX + PY + PZ = m \cdot \operatorname{tg}\alpha,$$

így az összeg valóban független a P pont helyzetétől.

Megjegyzés: A $PX + PY + PZ$ összeget a szabályos tetraéder élével is kifejezhetjük. Ha a tetraéder minden élének hossza a, akkor az ABC háromszög magassága:

$$m = \frac{a\sqrt{3}}{2}.$$

A szabályos tetraéder két szomszédos lapjának α hajlásszögére:

$$\operatorname{tg}\alpha = 2\sqrt{2}$$

(ez egyszerűen következik a 4222. feladat eredményeiből).

Ebből következően:

$$PX + PY + PZ = a\sqrt{6}.$$

A terület fogalma, a sokszögek területe – megoldások

4237 *a)* $2200\ \text{cm}^2$; *b)* $2025\ \text{cm}^2$; *c)* $1450\ \text{cm}^2$; *d)* $6800\ \text{cm}^2$.

4238 *a)* $54\ \text{cm}^2$; *b)* $6{,}16\ \text{cm}^2$; *c)* $39{,}92\ \text{cm}^2$; *d)* $630\ \text{cm}^2$.

e) A beírt kör oldalakkal való érintési pontját rendre E, F, illetve G jelöli (ld. ábra). Mivel a kör egy külső pontjából a körhöz ugyanakkora érintőszakaszok húzhatók, ezért:

$$BE = BF = x, \quad CF = CG = 13 - x, \quad AE = AG = 2.$$

Az ABC derékszögű háromszög befogóira teljesül:

$$AB = x + 2, \quad AC = 15 - x,$$

ezért Pitagorasz tétele alapján:

$$(x + 2)^2 + (15 - x)^2 = 13^2.$$

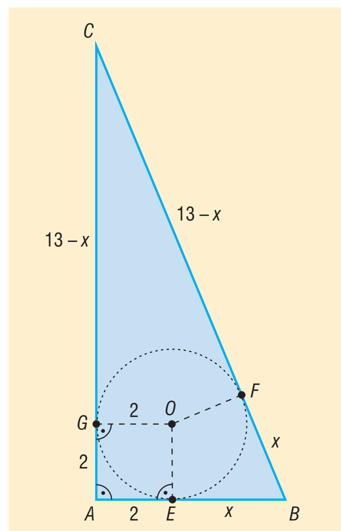
A műveletek elvégzése után:

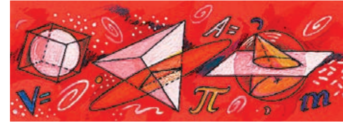
$$2x^2 - 26x + 60 = 0,$$

$$x^2 - 13x + 30 = 0.$$

A kapott egyenlet megoldásai: $x_1 = 3$ és $x_2 = 10$. A háromszög befogói: $AB = 5$ cm és $AC = 12$ cm (vagy fordítva).

A háromszög területe: $30\ \text{cm}^2$.





4239 8 cm.

4240 *a)* 4 cm; *b)* 2,8 cm.

4241 A téglalap területe nagyobb. Ha a paralelogramma két szomszédos oldala a és b, az általuk bezárt szög α, akkor területe $T = a \cdot b \cdot \sin\alpha$. Rögzített oldalak mellett a terület akkor maximális, ha $\alpha = 90°$.

4242 *a)* A terület $21\ \text{cm}^2$. A paralelogramma magasságainak hossza 3 cm, illetve 7 cm.
b) $T = 4{,}44\ \text{cm}^2$. A magasságok: 1,85 cm és 1,2 cm.
c) $T \approx 176{,}67\ \text{cm}^2$. A magasságok hossza: 14,72 cm és 10,39 cm.
d) $T \approx 38{,}07\ \text{cm}^2$. A magasságok hossza: 4,59 cm és 6,80 cm.

4243 *a)* $T = 10{,}5\ \text{cm}^2$. A paralelogramma minden oldala 3,81 cm hosszú. A magasságok hossza: 2,76 cm.
b) $T \approx 3{,}09\ \text{cm}^2$. Az oldalak hossza: 1,24 cm és 2,78 cm. A magasságok hossza: 2,49 cm és 1,11 cm.
c) $T \approx 18{,}13\ \text{cm}^2$. Az oldalak hossza: 3,71 cm és 5,54 cm. A magasságok hossza: 4,89 cm és 3,27 cm.

4244 *a)* 90°; *b)* 30°; *c)* 31,86°; *d)* 60,81°.

4245 $6\sqrt{3} \approx 10{,}39\ \text{cm}^2$.

4246 A trapéz területe: $36\ \text{cm}^2$.

4247 A trapéz területe: $35\ \text{cm}^2$.

4248 *a)* A szabályos hatszög területe: $216\sqrt{3} \approx 374{,}1\ \text{cm}^2$.

b) A szabályos nyolcszög területe: $8 \cdot \dfrac{12 \cdot \dfrac{6}{\text{tg}\,22{,}5°}}{2} \approx 695{,}3\ \text{cm}^2$.

c) A szabályos tízszög területe: $10 \cdot \dfrac{12 \cdot \dfrac{6}{\text{tg}\,18°}}{2} \approx 1108{,}0\ \text{cm}^2$.

4249 Az ötszög területe körülbelül $65{,}71\ \text{cm}^2$.

4250 *a)* A hétszög területe körülbelül $30{,}34\ \text{cm}^2$.
b) A hétszög területe $24{,}63\ \text{cm}^2$.

4251 A két síkidom területének aránya: $\dfrac{3}{\text{tg}\,15°} \approx 11{,}20$.

4252 Ha a nagy adag ára 1400 Ft, akkor a kis adagot legfeljebb $1400 \cdot \dfrac{1}{1{,}2^2} \approx 972{,}22$ Ft-ért érdemes megrendelni. A kis adag túrós csusza megér 950 Ft-ot.

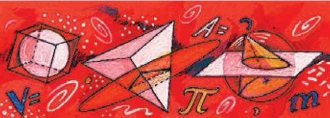
4253 A családi ház kicsinyített képének területe:

$$110 \cdot \left(\frac{1}{40}\right)^2 = 0{,}06875\ \text{m}^2, \quad \text{azaz} \quad 68\,750\ \text{mm}^2.$$

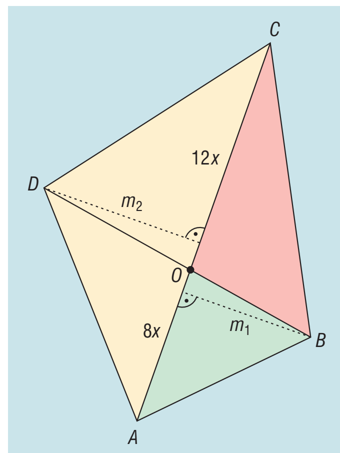
Az A4-es lap területe:

$$210 \cdot 297 = 62\,370\ \text{mm}^2.$$

A tervrajz nem fér el az A4-es lapon.



4254 Az ábra jelöléseinek megfelelően: az $ABCD$ négyszög átlói az O pontban metszik egymást, továbbá $T_{AOB} = 8\ \text{cm}^2$ és $T_{COB} = 12\ \text{cm}^2$. Mivel az AOB és COB háromszögekben az AO, illetve a CO alaphoz ugyanakkora magasság tartozik (az ábrán m_1), ezért a két háromszög területének aránya megegyezik az AO és CO oldalak arányával, így $AO = 8x$ és $CO = 12x$ alakban felírható. Vegyük észre, hogy az AOD és COD háromszögekben szintén ugyanakkora magasság tartozik az AO, illetve CO oldalakhoz (az ábrán m_2), ezért a két háromszög területének arányára teljesül, hogy

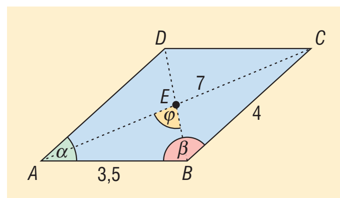


$$\frac{T_{AOD}}{T_{COD}} = \frac{\frac{8x \cdot m_2}{2}}{\frac{12x \cdot m_2}{2}} = \frac{2}{3}.$$

Mivel a két háromszög területének összege $30\ \text{cm}^2$, ezért $T_{AOD} = 12\ \text{cm}^2$ és $T_{COD} = 18\ \text{cm}^2$.

Az átlók berajzolása után keletkező másik két háromszög területe $12\ \text{cm}^2$, illetve $18\ \text{cm}^2$.

4255 *a)* Az erdő kicsinyített képe az $ABCD$ paralelogramma, amelyben $AB = 3{,}5$ cm, $BC = 4$ cm és $AC = 7$ cm. Az ABC háromszögben a koszinusztétel alapján:



$$AC^2 = AB^2 + BC^2 - 2 \cdot AB \cdot BC \cdot \cos\beta,$$
$$7^2 = 3{,}5^2 + 4^2 - 2 \cdot 3{,}5 \cdot 4 \cdot \cos\beta,$$
$$\cos\beta \approx -0{,}7411,$$
$$\beta \approx 137{,}83°.$$

Az $ABCD$ paralelogramma területe:

$$T = AB \cdot BC \cdot \sin\beta \approx 9{,}40\ \text{cm}^2.$$

Mivel az erdő az $ABCD$ paralelogramma 40 000-szeresére nagyított képe, ezért az erdő területe:

$$T \approx 40\,000^2 \cdot 9{,}40 = 1{,}504 \cdot 10^{10}\ \text{cm}^2, \quad \text{ami} \quad 150{,}4\ \text{ha}.$$

Megjegyzés: Az ABC háromszög területe Heron képletével is számolható.

b) Az $ABCD$ paralelogramma A csúcsánál lévő szögre:

$$\alpha = 180° - \beta \approx 42{,}17°.$$

Az ABD háromszögben koszinusztétel segítségével kapjuk, hogy:

$$BD \approx 2{,}74\ \text{cm}.$$

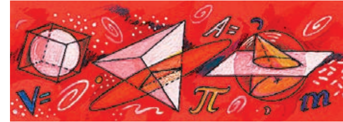
Az erdőt átszelő megfelelő turistaút hossza:

$$40\,000 \cdot 2{,}74 \cdot 10^{-5}\ \text{km} \approx 1{,}1\ \text{km}.$$

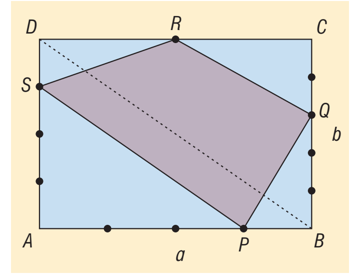
c) Ha az $ABCD$ paralelogramma átlóinak hajlásszögét φ jelöli, akkor a paralelogramma területére:

$$9{,}40 = \frac{AC \cdot BD \cdot \sin\varphi}{2},$$
$$\sin\varphi \approx 0{,}9802,$$
$$\varphi \approx 78{,}58°.$$

Az erdőben kijelölt turistautak $78{,}58°$-os szögben metszik egymást.



4256 *a)* Ha az $ABCD$ téglalap oldalai $AB = a$, $BC = b$, akkor az SRD derékszögű háromszög területe:



$$T_{SRD} = \frac{\left(\frac{1}{2}a\right)\cdot\left(\frac{1}{4}b\right)}{2} = \frac{1}{16}ab.$$

Ehhez hasonlóan:

$$T_{RQC} = \frac{\left(\frac{1}{2}a\right)\cdot\left(\frac{2}{5}b\right)}{2} = \frac{1}{10}ab,$$

$$T_{PQB} = \frac{\left(\frac{1}{4}a\right)\cdot\left(\frac{3}{5}b\right)}{2} = \frac{3}{40}ab, \qquad T_{PSA} = \frac{\left(\frac{3}{4}a\right)\cdot\left(\frac{3}{4}b\right)}{2} = \frac{9}{32}ab.$$

A derékszögű háromszögek területének összege:

$$\frac{1}{16}ab + \frac{1}{10}ab + \frac{3}{40}ab + \frac{9}{32}ab = \frac{10+16+12+45}{160}ab = \frac{83}{160}ab.$$

A $PQRS$ négyszög területe:

$$T_{PQRS} = T_{ABCD} - (T_{SRD} + T_{RQC} + T_{PQB} + T_{PSA}) =$$
$$= ab - \frac{83}{160}ab = \frac{77}{160}ab = \frac{77}{160}T_{ABCD}.$$

A $PQRS$ négyszög területe az $ABCD$ téglalap területének 48,125%-a.

b) A PS és QR szakaszok nem párhuzamosak egymással. Mivel:

$$\frac{AP}{AB} = \frac{AS}{AD} = \frac{3}{4},$$

ezért a PSA és BDA derékszögű háromszögek befogóinak aránya megegyezik, így a két háromszög hasonló, amiből következik, hogy PS párhuzamos a BD átlóval.

Másrészt:

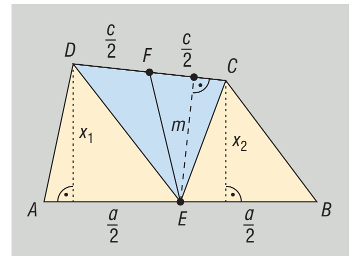
$$\frac{CR}{CD} = \frac{1}{2}, \quad \text{illetve} \quad \frac{CQ}{CB} = \frac{2}{5},$$

ezért:

$$\frac{CR}{CD} \neq \frac{CQ}{CB}.$$

Ebből következik, hogy QR nem párhuzamos BD-vel, így persze PS-sel sem.

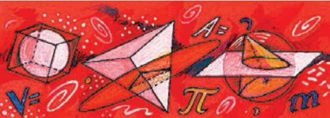
4257 Tekintsünk egy olyan $ABCD$ négyszöget, amelynek területét az EF középvonala megfelezi (ld. ábra), azaz:



$$T_{AEFD} = T_{EBCF}. \quad (1)$$

Mivel az F pont felezi a CD oldalt, ezért a $DFE_{\triangle}$ és a $CFE_{\triangle}$ egy-egy oldala ugyanakkora, továbbá megegyezik az ezekhez az oldalakhoz tartozó magasságuk is (az ábrán az m-mel jelölt szakasz). Ebből következik, hogy a két háromszög területe egyenlő, azaz:

$$T_{DFE} = T_{CFE}. \quad (2)$$

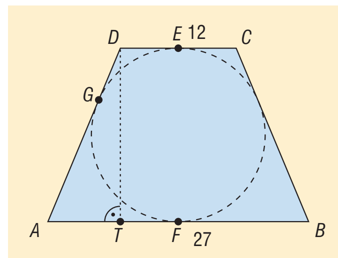


Az (1) és (2) egyenlőségek megfelelő oldalainak különbsége alapján:

$$T_{AEFD} - T_{DFE} = T_{EBCF} - T_{CFE},$$
$$T_{AED} = T_{EBC}.$$

Vegyük észre, hogy az AED és az EBC háromszögekben $AE = EB$, ezért területük csak úgy egyezhet meg, ha az ugyanakkora oldalaikhoz tartozó magasságuk is egyenlő, vagyis $x_1 = x_2$). Ekkor viszont a D és C pontok ugyanakkora távolságra vannak az AB egyenestől, amiből következik, hogy DC és AB párhuzamosak. Ez azt jelenti, hogy az $ABCD$ négyszög trapéz.

4258 Az $ABCD$ húrtrapézba írható kör a trapéz AB alapját az F, CD alapját az E felezőpontban érinti.



A körhöz egy külső pontjából húzott érintőszakaszai egyenlő hosszúak, ezért:

$$AG = AF = 13{,}5 \text{ cm} \quad \text{és} \quad DG = DE = 6 \text{ cm}.$$

Ebből következik, hogy:

$$AD = AG + DG = 19{,}5 \text{ cm}.$$

Az ATD derékszögű háromszög AT befogójának hossza:

$$AT = \frac{27 - 12}{2} = 7{,}5 \text{ cm}.$$

Pitagorasz tétele alapján:

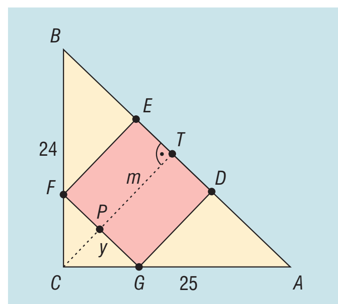
$$DT^2 = AD^2 - AT^2 \quad \Rightarrow \quad DT = \sqrt{19{,}5^2 - 7{,}5^2} \quad \Rightarrow \quad DT = 18 \text{ cm}.$$

A trapéz területe:

$$T = \frac{27 + 12}{2} \cdot 18 = 351 \text{ cm}^2.$$

Mivel DT ugyanakkora, mint EF, azaz a kör átmérője, ezért a trapézba írható kör sugara 9 cm.

4259 Vizsgáljuk meg először Csilla javaslatát. A ház sarkait jelöljük az ábrának megfelelően a D, E, F és G pontokkal, a $DEFG$ négyzet oldalát pedig y-nal. Mivel az $ABC_\triangle$ és a $GFC_\triangle$ szögei páronként megegyeznek (a derékszög közös, további megfelelő szögeik egyállású szögek), ezért a két háromszög hasonló. Ha az $ABC_\triangle$ átfogójához tartozó CT magasságának hosszát m jelöli, továbbá CT a GF szakaszt a P pontban metszi, akkor a háromszögekben az egymásnak megfelelő szakaszok arányára:



$$\frac{AB}{GF} = \frac{CT}{CP}, \qquad \text{azaz} \qquad \frac{AB}{y} = \frac{m}{m - y}.$$

Az egyenlőségből y értékét kifejezve:

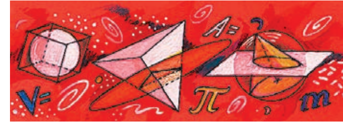
$$y = \frac{m \cdot AB}{m + AB}.$$

Az $ABC_\triangle$ átfogója:

$$AB = \sqrt{24^2 + 25^2} = \sqrt{1201} \ (\approx 34{,}66 \text{ cm}).$$

A háromszög területét kétféleképpen felírva:

$$\frac{AB \cdot m}{2} = \frac{AC \cdot CB}{2} \quad \Rightarrow \quad m = \frac{24 \cdot 25}{\sqrt{1201}} \approx 17{,}31 \text{ m}.$$

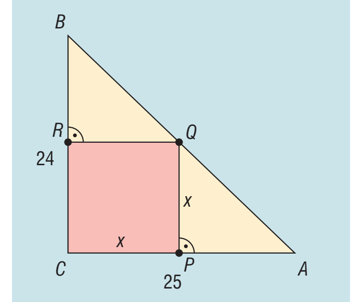


Ebből következően:

$$y = \frac{\frac{600}{\sqrt{1201}} \cdot \sqrt{1201}}{\frac{600}{\sqrt{1201}} + \sqrt{1201}} = \frac{600\sqrt{1201}}{1801},$$

$$y \approx 11,55 \text{ m.}$$

Nézzük most Csaba javaslatát. Ha a ház C-től különböző sarkait az ábrának megfelelően a P, Q, R pontokkal, a $PQRC$ négyzet oldalait pedig x-szel jelöljük, akkor az $ABC_\triangle$ hasonló az $AQP_\triangle$-höz, ezért:



$$\frac{AC}{AP} = \frac{CB}{PQ},$$

$$\frac{25}{25-x} = \frac{24}{x},$$

$$x = \frac{24 \cdot 25}{49} \approx 12,24 \text{ m.}$$

Látható, hogy Csaba terve alapján építenének nagyobb alapterületű házat.

4260 *a)* A 4257. feladat eredménye alapján, ha az $ABCD$ négyszög területét az AB és CD oldalt összekötő középvonala megfelezi, akkor a négyszög trapéz, amelynek alapjai AB és CD. A feltételek szerint azonban a négyszög területét a BC és DA oldalakat összekötő középvonala is megfelezi, ezért BC és DA szintén párhuzamosak. Ezek alapján az örökölt telek szemközti oldalai párhuzamosak, azaz a telek paralelogramma alakú.

b) A paralelogramma átlója két egybevágó háromszögre bontja a paralelogrammát, ezért András és Béla külön-külön akkora területű részt örökölt, mint amekkora a megadott oldalak által határolt háromszög területe. A háromszög területét pl. Heron képletével számolhatjuk. Mivel:

$$s = \frac{18 + 15 + 22,4}{2} = 27,7 \text{ m},$$

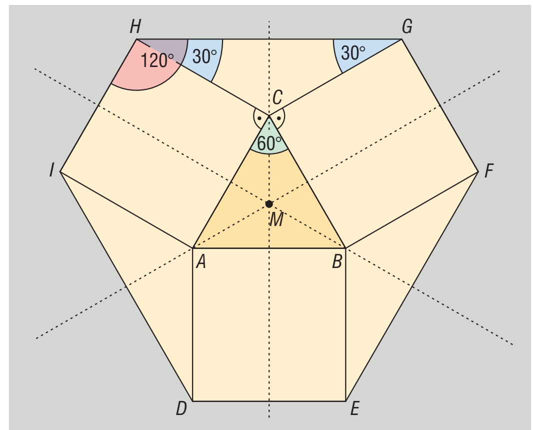
ezért a terület:

$$T = \sqrt{27,7 \cdot (27,7-18) \cdot (27,7-15) \cdot (27,7-22,4)} \approx 134,48 \text{ m}^2.$$

András és Béla külön-külön körülbelül $134,48 \text{ m}^2$ területű telekrészt örököltek.

4261 *a)* Az ABC szabályos háromszög C csúcsánál 60°-os, a C csúcshoz illeszkedő négyzeteken „belül” 90°-os szögek vannak (ld. ábra). Ebből következik, hogy:

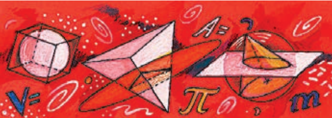
$$HCG\sphericalangle = 360° - (90° + 90° + 60°) = 120°.$$



Mivel a $HCG_\triangle$ egyenlő szárú (mivel CH és CG ugyanakkorák, mint a szabályos háromszög oldalai), ezért a HG alapon 30°-os szögek vannak, amiből következik, hogy:

$$IHG\sphericalangle = 90° + 30° = 120°.$$

Ugyanez a hatszög többi szögére is bizonyítható, tehát a $DEFGHI$ hatszög minden szöge 120°-os.



b) A *DEFGHI* hatszög tengelyesen szimmetrikus az $ABC_\triangle$ magasságvonalaira, továbbá forgásszimmetriát mutat az $ABC_\triangle$ magasságpontja körüli, $k \cdot 120°$-os forgatásokra nézve ($k \in \mathbb{Z}$).

c) A *DEFGHI* hatszög területe a következő síkidomok területének összege: az *ABC* szabályos háromszög, három darab 10 cm oldalú négyzet, valamint három darab egyenlő szárú egybevágó háromszög ($GHC_\triangle$, $IDA_\triangle$ és $EFB_\triangle$). Az *ABC* szabályos háromszög területe:

$$T_1 = \frac{10 \cdot \left(10 \cdot \frac{\sqrt{3}}{2}\right)}{2} = 25\sqrt{3} \approx 43{,}30 \text{ cm}^2.$$

A háromszög oldalaira rajzolt három négyzet területének összege:

$$T_2 = 3 \cdot 10^2 = 300 \text{ cm}^2.$$

A $GHC_\triangle$ területe:

$$T_{GHC} = \frac{10 \cdot 10 \cdot \sin 120°}{2} = 25\sqrt{3} \approx 43{,}30 \text{ cm}^2.$$

Az $ABC_\triangle$ csúcsaihoz illeszkedő három egybevágó háromszög területének összege:

$$T_3 = 3 \cdot T_{GHC} = 75\sqrt{3} \approx 129{,}90 \text{ cm}^2.$$

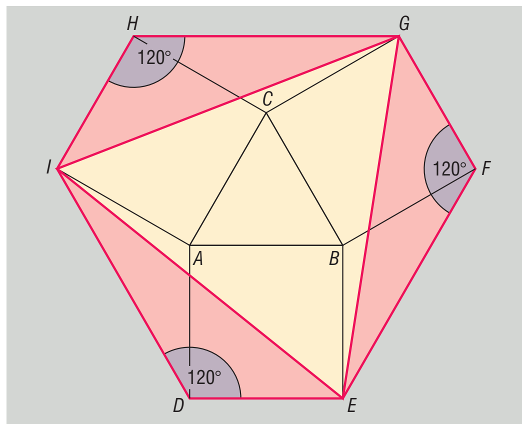
A *DEFGHI* hatszög területe:

$$T = T_1 + T_2 + T_3 = 100\sqrt{3} + 300 \approx 473{,}21 \text{ cm}^2.$$

Megjegyzések:

1. Ha az utolsó számításnál a korábbi közelítő értékeket adjuk össze, és nem csak a legvégén végezzük el a kerekítést, akkor $473{,}20 \text{ cm}^2$-t kapunk eredményként.
2. Vegyük észre, hogy az $ABC_\triangle$ és $GHC_\triangle$ területe megegyezik. Ez persze nyilvánvaló, ha figyelembe vesszük, hogy két-két oldaluk megegyezik, továbbá az egyenlő oldalak által bezárt szögek (60° és 120°) szinusza szintén megegyezik.

d) A $GEI_\triangle$ szabályos. Ahhoz, hogy ezt belássuk, vizsgáljuk meg a *GIH*, *IED*, *EGF* háromszögeket.



A háromszögekben két-két oldal, valamint az általuk közrefogott szögek egyenlők. Ebből következik, hogy az ábrán megjelölt háromszögek egybevágók, ami mutatja, hogy a $GEI_\triangle$ oldalai egyenlők, azaz valóban szabályos háromszög.

A $GEI_\triangle$ oldalának hosszát a $GIH_\triangle$-ből számíthatjuk ki. Ehhez szükségünk van a *GH* oldal hosszára is.

A $GHC_\triangle$-ből koszinusztétellel számolva:

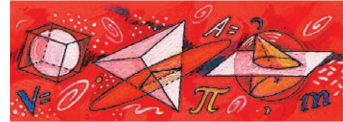
$$GH^2 = 10^2 + 10^2 - 2 \cdot 10 \cdot 10 \cdot \cos 120° \quad \Rightarrow \quad GH = \sqrt{300} = 10\sqrt{3} \approx 17{,}32 \text{ cm}.$$

Alkalmazva a koszinusztételt, ezúttal a $GHI_\triangle$-re:

$$GI^2 = 10^2 + \left(10\sqrt{3}\right)^2 - 2 \cdot 10 \cdot \left(10\sqrt{3}\right) \cdot \cos 120° \quad \Rightarrow \quad GI = 10\sqrt{4 + \sqrt{3}} \approx 23{,}94 \text{ cm}.$$

Végül a *GEI* szabályos háromszög területe:

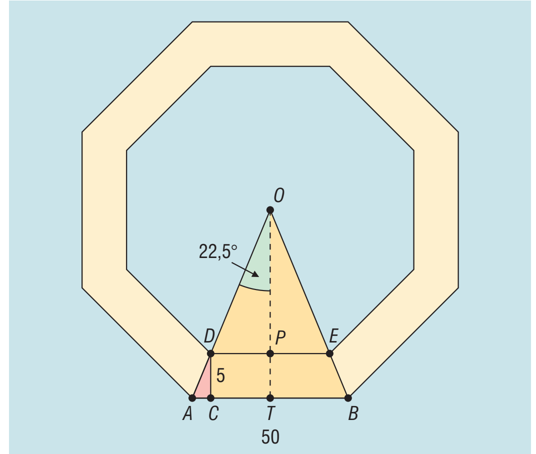
$$T_{GEI} = \frac{\left(10\sqrt{4+\sqrt{3}}\right)^2 \cdot \frac{\sqrt{3}}{2}}{2} = \left(100 + 25\sqrt{3}\right) \cdot \sqrt{3} \approx 248{,}21 \text{cm}^2.$$



4262 Az ábra jelölései alapján:

$$AOB\sphericalangle = \frac{360^\circ}{8} = 45^\circ,$$

ezért az ABO egyenlő szárú háromszög OT magassága 22,5°-os szöget zár be az OA szárral. Mivel az $ADC_\triangle$ és az $AOT_\triangle$ hasonló, ezért $ADC\sphericalangle = AOT\sphericalangle = 22{,}5^\circ$, így:



$$\text{tg}\,22{,}5^\circ = \frac{AC}{CD},$$

$$AC = 5 \cdot \text{tg}\,22{,}5^\circ \approx 2{,}07 \text{ cm}.$$

A képkeret belső oldala:

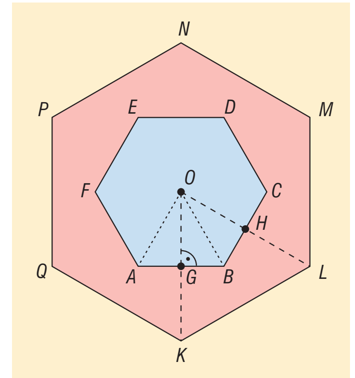
$$DE = AB - 2 \cdot AC \approx 45{,}86 \text{ cm}.$$

A keretbe elhelyezhető vászon területe:

$$T = 8 \cdot T_{DEO} = 8 \cdot \frac{DE \cdot OP}{2} \approx 8 \cdot \frac{45{,}86 \cdot \dfrac{45{,}86}{2 \cdot \text{tg}\,22{,}5^\circ}}{2} \approx 10154{,}86 \text{ cm}^2.$$

A számolások elvégzése után azt kapjuk, hogy a vászon területe körülbelül $1{,}02 \text{ m}^2$.

4263 Az $ABCDEF$ szabályos hatszög O középpontját tükrözzük az oldalfelező pontokra, így az ábra szerinti $KLMNPQ$ szabályos hatszöget kapjuk. Ha az AB oldal felezőpontja G, akkor OG az ABO szabályos háromszög magassága, ezért:



$$OG = 8 \cdot \frac{\sqrt{3}}{2} = 4\sqrt{3} \approx 6{,}93 \text{ cm}.$$

A tükrözés miatt G az OK szakasz felezőpontja, amiből:

$$OK = 8\sqrt{3} \approx 13{,}86 \text{ cm}.$$

Az OKL háromszög szintén szabályos, ezért a $KLMNPQ$ hatszög oldalainak hossza:

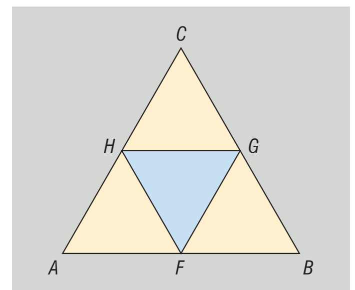
$$8\sqrt{3} \approx 13{,}86 \text{ cm}.$$

Végül a $KLMNPQ$ hatszög területe:

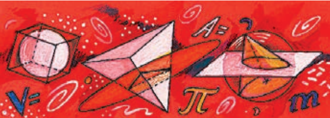
$$T = 6 \cdot \frac{(8\sqrt{3}) \cdot (8\sqrt{3}) \cdot \dfrac{\sqrt{3}}{2}}{2} = 288\sqrt{3} \approx 498{,}83 \text{ cm}^2.$$

A keletkező hatszög területe körülbelül $498{,}83 \text{ cm}^2$.

4264 *a)* A háromszög középvonalai a háromszöget négy egybevágó háromszögre bontják (ld. ábra), ezért ha az oldalfelező pontok F, G és H, akkor:

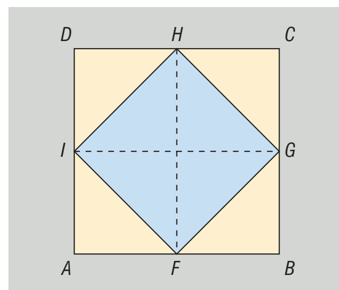


$$\frac{T_{ABC}}{T_{FGH}} = 4.$$



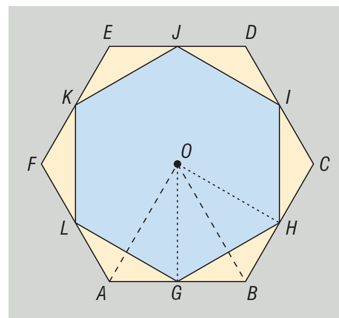
b) Ha az $ABCD$ négyzet oldalfelező pontjai F, G, H és I, akkor:

$$\frac{T_{ABCD}}{T_{FGHI}} = 2.$$



c) Ha az $ABCDEFG$ szabályos hatszög oldala a, akkor a hatszög területe:

$$T_{ABCDEF} = 6 \cdot \frac{a^2 \cdot \frac{\sqrt{3}}{2}}{2} = \frac{3\sqrt{3}}{2} \cdot a^2.$$



A hatszög oldalfelező pontjai által közrefogott $GHIJKL$ hatszög szintén szabályos, és O középpontja egybeesik az $ABCDEF$ hatszög középpontjával. Mivel az $OGH_{\triangle}$ is szabályos, ezért a $GHIJKL$ hatszög minden oldala ugyanakkora, mint OG.

Az OG szakasz magasság az ABO szabályos háromszögben, ezért:

$$OG = \frac{a\sqrt{3}}{2}.$$

A $GHIJKL$ hatszög területe:

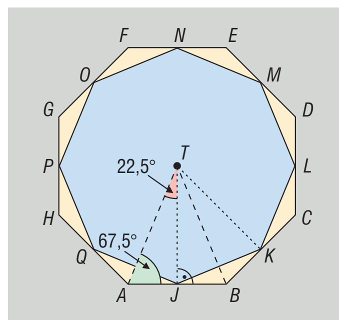
$$T_{GHIJKL} = 6 \cdot \frac{\left(\frac{a\sqrt{3}}{2}\right)^2 \cdot \frac{\sqrt{3}}{2}}{2} = \frac{9\sqrt{3}}{8} \cdot a^2.$$

A két hatszög területének aránya:

$$\frac{T_{ABCDEF}}{T_{GHIJKL}} = \frac{\frac{3\sqrt{3}}{2} \cdot a^2}{\frac{9\sqrt{3}}{8} \cdot a^2} = \frac{4}{3}.$$

d) Az $ABCDEFGH$ szabályos nyolcszög oldalfelező pontjai a $JKLMNOPQ$ szintén szabályos nyolcszöget fogják közre, ezért ha a nyolcszögek közös középpontja T, akkor a JKT és az ABT háromszögek hasonlók egymáshoz (ld. ábra). Ebből adódóan:

$$\frac{JK}{AB} = \frac{JT}{AT}.$$

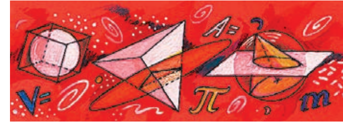


Az ATJ derékszögű háromszögből:

$$\sin 67{,}5^\circ = \frac{JT}{AT}.$$

Visszahelyettesítve az első egyenlőségbe:

$$\frac{JK}{AB} = \sin 67{,}5^\circ.$$



Ezt úgy is megfogalmazhatjuk, hogy az $ABCDEFGH$ nyolcszöget egy $\lambda = \sin 67{,}5°$ arányú hasonlósági transzformáció viszi át a $JKLMNOPQ$ nyolcszögbe. Mivel hasonló síkidomok területének aránya a hasonlóság arányának négyzete, ezért:

$$\frac{T_{JKLMNOPQ}}{T_{ABCDEFGH}} = \sin^2 67{,}5°,$$

azaz

$$\frac{T_{ABCDEFGH}}{T_{JKLMNOPQ}} = \frac{1}{\sin^2 67{,}5°} \approx 1{,}17.$$

e) A sorozat tagjait a_n jelöli. A *d)* feladat levezetéséből láthatjuk, hogy a két sokszög hasonló egymáshoz, a hasonlóság arányát ugyanúgy számolhatjuk ki, mint ahogy a nyolcszög esetében tettük. A sokszögek közös középpontjánál kialakuló szög ebben az esetben nem 22,5°, hanem $\frac{180°}{n}$, a hasonlóság (amelyik az eredeti sokszöget a középpontok által közrefogott sokszögbe viszi át) aránya pedig $\sin\left(90° - \frac{180°}{n}\right)$, ezért:

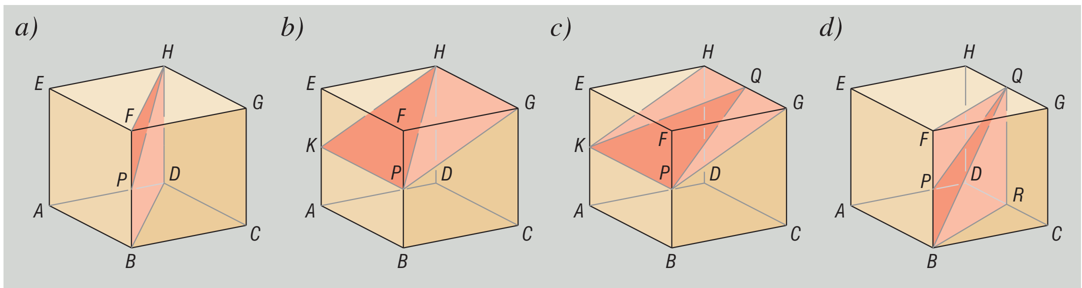
$$a_n = \frac{1}{\sin^2\left(90° - \frac{180°}{n}\right)} = \frac{1}{\cos^2\left(\frac{180°}{n}\right)}.$$

Ha n tart végtelenbe, akkor $\frac{180°}{n} \to 0°$, a koszinuszfüggvény folytonossága miatt pedig:

$$\cos\left(\frac{180°}{n}\right) \to 1.$$

Az a_n sorozat határértéke 1.

4265



a) A síkmetszet a $BFHD$ téglalap. A téglalap FH oldala a kocka egyik lapátlója, ezért:

$$FH = 5\sqrt{2} \approx 7{,}07 \text{ cm},$$

így a síkmetszet területe körülbelül $35{,}35 \text{ cm}^2$.

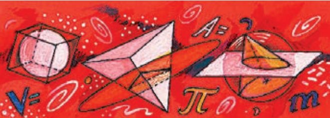
b) A síkmetszet a $PKHG$ téglalap. A téglalap GP oldala a GPF derékszögű háromszögből:

$$GP = \sqrt{5^2 + 2{,}5^2} \approx 5{,}59 \text{ cm},$$

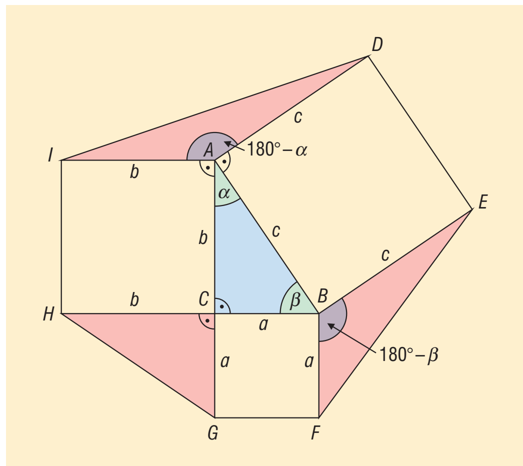
így a síkmetszet területe körülbelül $27{,}95 \text{ cm}^2$.

c) A síkmetszet ezúttal is a $PKHG$ téglalap, amelynek területe körülbelül $27{,}95 \text{ cm}^2$.

d) A BPQ sík a kocka CD élét annak R felezőpontjában metszi, ezért a síkmetszet a $BFQR$ téglalap. A síkmetszet területe körülbelül $27{,}95 \text{ cm}^2$.



4266 *a)* Az $ABC_\triangle$ oldalait és szögeit a szokásos módon jelöljük. A $HGC_\triangle$ derékszögű, befogói a és b, így a háromszög egybevágó az $ABC_\triangle$-gel, tehát területük is megegyezik. Megmutatjuk, hogy az $ADI_\triangle$ és $FEB_\triangle$ területe is ugyanakkora, mint az $ABC_\triangle$ területe.



Az $ADI_\triangle$-ben $AI = b$ és $AD = c$, továbbá $IAD\sphericalangle = 180° - \alpha$, ezért területe:

$$T_{ADI} = \frac{bc \cdot \sin(180° - \alpha)}{2} = \frac{bc \cdot \sin\alpha}{2}.$$

Vegyük észre, hogy a jobb oldalon éppen az $ABC_\triangle$ területe szerepel, ezért:

$$T_{ADI} = T_{ABC}.$$

Ugyanígy gondolkodva:

$$T_{FEB} = \frac{ac \cdot \sin(180° - \beta)}{2} = \frac{ac \cdot \sin\beta}{2},$$

azaz:

$$T_{FEB} = T_{ABC}.$$

Ezzel igazoltuk, hogy a $HGC_\triangle$, $ADI_\triangle$ és $FEB_\triangle$ területe megegyezik az $ABC_\triangle$ területével.

b) A $DEFGHI$ hatszög területére:

$$T_{DEFGHI} = 4 \cdot T_{ABC} + T_{AIHC} + T_{BCGF} + T_{ABED} =$$
$$= 4 \cdot \frac{ab}{2} + b^2 + a^2 + c^2 = (a+b)^2 + c^2.$$

A feltételek szerint $a + b = 10$, ezért:

$$T_{DEFGHI} = 100 + c^2.$$

Látható, hogy a hatszög területe akkor a lehető legkisebb, ha az $ABC_\triangle$ átfogójára rajzolt c oldalú négyzet területe minimális. Pitagorasz tétele alapján azonban $c^2 = a^2 + b^2$, majd felhasználva, hogy a befogók összege állandó:

$$c^2 = a^2 + (10 - a)^2 = 2a^2 - 20a + 100 = 2 \cdot (a - 5)^2 + 50.$$

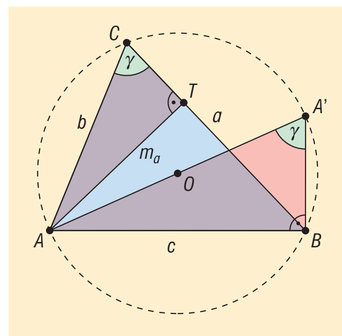
A teljes négyzetté alakított sorról leolvasható, hogy az $ABC_\triangle$ átfogójára rajzolt négyzet területe legalább 50 cm^2, és pontosan akkor a legkisebb, ha $a = 5$ cm, és ebből következően $b = 5$ cm.

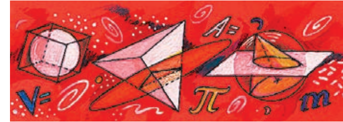
Összefoglalva: a $DEFGHI$ hatszög területe minimális, ha az $ABC_\triangle$ egyenlő szárú, azaz befogói 5 cm hosszúak. Ekkor a hatszög területe 150 cm^2.

4267 *a)* Előbb az ABC hegyesszögű háromszöget vizsgáljuk. Az $ACB\sphericalangle$ a háromszög köré írható körben a C-t nem tartalmazó AB köríven nyugvó kerületi szög. Ugyanezen a köríven nyugszik az $AA'B\sphericalangle$ is, így a kerületi szögek tétele alapján:

$$ACB\sphericalangle = AA'B\sphericalangle = \gamma.$$

Thalész tétele alapján az ABA' háromszög derékszögű, ezért a $CAT_\triangle$ és az $A'AB_\triangle$ két szöge megegyezik, tehát a két háromszög valóban hasonló egymáshoz.





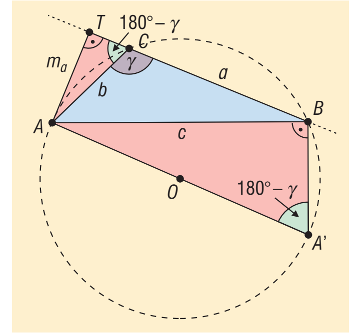
Tompaszögű háromszög esetén a T pont a BC oldalon kívül fekszik. Ebben az esetben a $CAT_{\triangle}$-ben:

$$ACT\sphericalangle = 180° - \gamma.$$

Az $AA'BC$ négyszög húrnégyszög, ezért szemközti szögeinek összege 180°, amiből:

$$AA'B\sphericalangle = 180° - \gamma,$$

ami mutatja, hogy a $CAT_{\triangle}$ és $A'AB_{\triangle}$ szögei ezúttal is egyenlők, így a két háromszög hasonló egymáshoz.



b) Felhasználva a $CAT_{\triangle}$ és $A'AB_{\triangle}$ hasonlóságát, azt kapjuk, hogy:

$$\frac{AT}{AB} = \frac{AC}{AA'} \quad\Rightarrow\quad \frac{m_a}{c} = \frac{b}{2R} \quad\Rightarrow\quad m_a = \frac{bc}{2R}.$$

Az $ABC_{\triangle}$ területe:

$$T = \frac{a \cdot m_a}{2}, \quad \text{amiből} \quad T = \frac{abc}{4R}.$$

c) Derékszögű háromszögben a T pont egybeesik a C, az A' pont pedig a B csúccsal, ezért a $CAT_{\triangle}$ és $A'AB_{\triangle}$ nem jön létre. A derékszögű háromszögben $c = 2R$, ezért:

$$T = \frac{ab}{2} = \frac{ab}{2} \cdot \frac{c}{c} = \frac{ab}{2} \cdot \frac{c}{2R} = \frac{abc}{4R}.$$

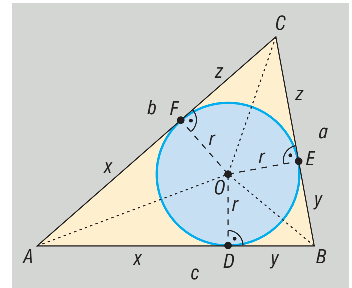
A területképlet derékszögű háromszögre is érvényes.

4268 *a)* A körhöz egy külső pontjából húzott érintőszakaszok hossza megegyezik, ezért:

$$AD = AF = x, \quad BD = BE = y \quad \text{és} \quad CE = CF = z.$$

A háromszög oldalai az érintőszakaszok segítségével:

$$y + z = a, \quad (1)$$
$$x + z = b, \quad (2)$$
$$x + y = c. \quad (3)$$



A kapott egyenlőségek megfelelő oldalainak összegéből:

$$2(x + y + z) = 2s, \quad \text{tehát} \quad x + y + z = s.$$

Ha az utolsó egyenlőségből rendre kivonjuk az (1), (2) és (3) egyenlőségek megfelelő oldalát, akkor adódik, hogy:

$$x = s - a, \quad y = s - b \quad \text{és} \quad z = s - c.$$

Éppen ezt kellett igazolnunk.

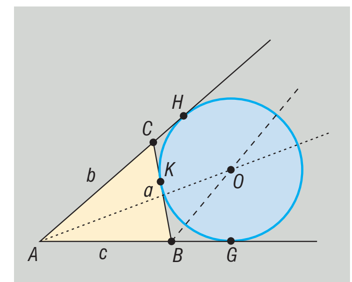
b) Ezúttal is felhasználjuk, hogy egy külső pontból a körhöz húzott érintőszakaszok egyenlő hosszúak, ezért:

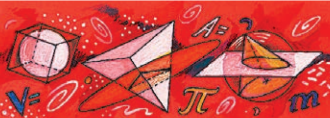
$$AG = AH, \quad BG = BK \quad \text{és} \quad CH = CK.$$

Ezek alapján:

$$2 \cdot AG = AG + AH = (c + BG) + (b + CH) =$$
$$= (c + BK) + (b + CK) = c + (BK + CK) + b =$$
$$= c + a + b = 2s,$$

tehát $AG = AH = s$, amit bizonyítani kellett.

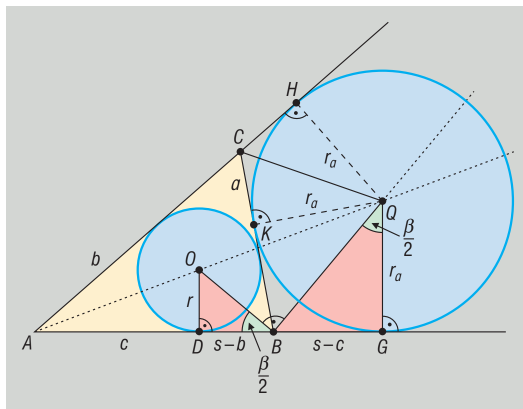




c) Az O pont a háromszög belső szögfelezőinek metszéspontja, ezért:

$$OBD\sphericalangle = \frac{\beta}{2}.$$

A Q pont illeszkedik a B csúcsnál található külső szög szögfelezőjére. Mivel a háromszög egy belső, valamint a mellette fekvő külső szögének szögfelezője merőleges egymásra, ezért $OBQ\sphericalangle = 90°$, amiből következik, hogy a $BQG\sphericalangle$ szárai páronként merőlegesek az $OBD\sphericalangle$ száraira, azaz a két szög merőleges szárú szögpárt alkot, ezért:



$$BQG\sphericalangle = OBD\sphericalangle = \frac{\beta}{2}$$

(nyilvánvaló, hogy mindkét szög hegyesszög). Látható, hogy a $BOD_\triangle$ és a $QBG_\triangle$ szögei megegyeznek, ezért a két háromszög valóban hasonló egymáshoz.

d) Az *a)* feladat ábrája alapján:

$$T_{ABC} = T_{BCO} + T_{CAO} + T_{ABO} = \frac{a \cdot r}{2} + \frac{b \cdot r}{2} + \frac{c \cdot r}{2} = \frac{r \cdot (a+b+c)}{2} = r \cdot s.$$

e) A *c)* feladat ábrája alapján ABQC négyszög területét kétféleképpen is felírhatjuk:

$$T_{ABQC} = T_{ABQ} + T_{ACQ}, \quad \text{illetve} \quad T_{ABQC} = T_{ABC} + T_{BCQ}.$$

Mivel az $ABQ_\triangle$-ben és az $ACQ_\triangle$-ben az $AB = c$, illetve az $AC = b$ oldalakhoz tartozó magasság egyaránt r_a hosszúságú, ezért:

$$T_{ABQC} = \frac{c \cdot r_a}{2} + \frac{b \cdot r_a}{2} = \frac{(b+c) \cdot r_a}{2}. \qquad (1)$$

Mivel a $BCQ_\triangle$-ben a $BC = a$ oldalhoz szintén r_a hosszúságú magasság tartozik, ezért:

$$T_{ABQC} = T_{ABC} + \frac{a \cdot r_a}{2}. \qquad (2)$$

(1) és (2) alapján:

$$\frac{(b+c) \cdot r_a}{2} = T_{ABC} + \frac{a \cdot r_a}{2},$$

majd kifejezve az $ABC_\triangle$ területét:

$$T_{ABC} = \frac{(b+c) \cdot r_a - a \cdot r_a}{2} = \frac{b+c-a}{2} \cdot r_a = \frac{a+b+c-2a}{2} \cdot r_a = (s-a) \cdot r_a.$$

f) A $BOD_\triangle$ és $QBG_\triangle$ hasonlósága alapján (lásd a *c)* feladat ábráját):

$$\frac{r}{s-c} = \frac{s-b}{r_a} \quad \Rightarrow \quad r \cdot r_a = (s-b) \cdot (s-c).$$

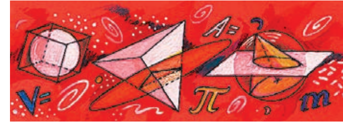
A *d)* feladat alapján $r = \frac{T}{s}$, míg az *e)* feladat alapján $r_a = \frac{T}{s-a}$, így:

$$\frac{T}{s} \cdot \frac{T}{s-a} = (s-b) \cdot (s-c),$$

amiből átrendezés után:

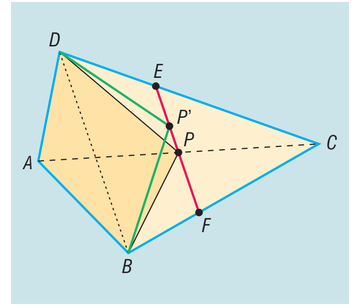
$$T^2 = s \cdot (s-a) \cdot (s-b) \cdot (s-c) \quad \Rightarrow \quad T = \sqrt{s \cdot (s-a) \cdot (s-b) \cdot (s-c)}.$$

Ezzel igazoltuk Heron képletét.



4269 Ha a P pont egybeesik az AC átló felezőpontjával, akkor DP az $ACD_\triangle$, míg BP az $ACB_\triangle$ egy-egy súlyvonala. A háromszög súlyvonala megfelezi a háromszög területét, ezért:

$$T_{APD} = T_{CPD} \quad \text{és} \quad T_{APB} = T_{CPB}.$$



A két egyenlőség megfelelő oldalainak összeadása után láthatjuk, hogy:

$$T_{ABPD} = T_{BCDP},$$

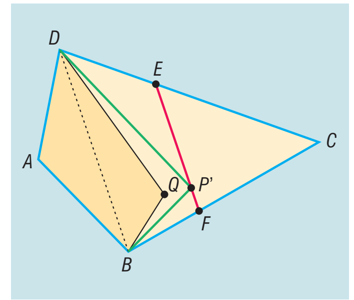
ezért az AC átló P felezőpontja megfelel a feltételeknek.

Húzzunk ezután párhuzamost az AC szakasz felezőpontján át a BD átlóval. A párhuzamos metssze a CD oldalt E-ben, a CB oldalt pedig F-ben. Legyen P' az EF szakasz egy tetszőleges pontja. Ekkor a $DBPP'$ (vagy a $DBP'P$) négyszög trapéz, így a $DBP_\triangle$ és $DBP'_\triangle$ közös DB oldalához ugyanakkora magasság tartozik, ezért a két háromszög területe is egyenlő. Ebből következik, hogy:

$$T_{ABP'D} = T_{DBA} + T_{DBP'} = T_{DBA} + T_{DBP} = T_{ABPD},$$

azaz ha a P' pont az EF szakaszon változik, akkor az $ABP'D$ négyszög területe állandó, így az EF szakasz minden pontja megfelel a feltételeknek.

Végül megmutatjuk, hogy az $ABCD$ négyszög belsejében nincs további olyan pont, amelyre teljesülne a feladat feltétele. Nyilvánvaló, hogy ilyen pont nem lehet az $ABD_\triangle$ belsejében.



Ha a Q pont a $DBFE$ trapéz belsejében van, akkor biztosan találunk az EF szakaszon olyan P' pontot (lásd ábra), amelyre a $DBP'_\triangle$ belsejében tartalmazza a Q pontot.

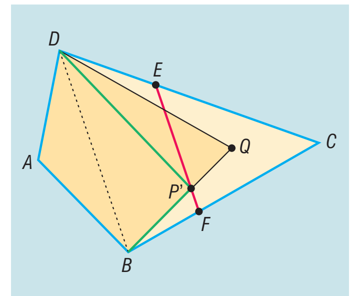
Ekkor a $DBQ_\triangle$ területe kisebb, mint a $DBP'_\triangle$ területe, így az $ABQD$ négyszög területe is kisebb, mint az $ABP'D$ négyszög területe.

Ha viszont a Q pont az $EFC_\triangle$ belső pontja, és a BQ szakasz az EF szakaszt a P' pontban metszi, akkor látható, hogy:

$$T_{DBQ} > T_{DBP'}$$

így az $ABQD$ négyszög területe biztosan nagyobb, mint az $ABCD$ négyszög területének fele.

Ezzel megmutattuk, hogy kizárólag az EF szakasz pontjai felelnek meg a feltételnek.



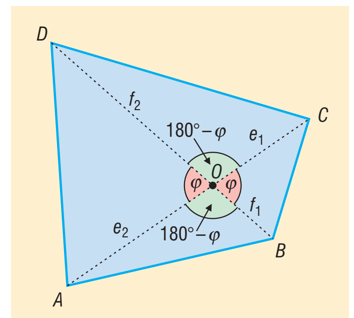
4270 Jelöljük az átlók hajlásszögét φ-vel, továbbá legyen az O pontot a csúcsokkal összekötő szakaszok hossza rendre:

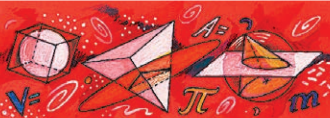
$$OC = e_1, \quad OA = e_2, \quad OB = f_1 \quad \text{és} \quad OD = f_2.$$

Ekkor a megfelelő háromszögek területére igaz, hogy:

$$T_{ABO} = \frac{f_1 \cdot e_2 \cdot \sin(180^\circ - \varphi)}{2},$$

$$T_{CDO} = \frac{e_1 \cdot f_2 \cdot \sin(180^\circ - \varphi)}{2}.$$





Az $ABCD$ négyszögön belül kialakuló másik két háromszög területére igaz, hogy:

$$T_{BCO} = \frac{e_1 \cdot f_1 \cdot \sin\varphi}{2},$$

$$T_{DAO} = \frac{f_2 \cdot e_2 \cdot \sin\varphi}{2}.$$

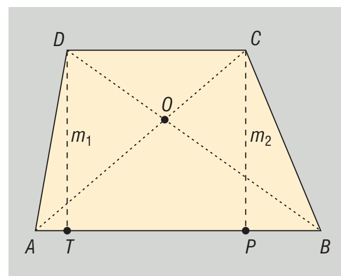
Mivel $\sin(180° - \varphi) = \sin\varphi$, ezért a két-két „szemközti” négyszög területének szorzata:

$$T_{ABO} \cdot T_{CDO} = \frac{f_1 \cdot e_2 \cdot \sin\varphi}{2} \cdot \frac{e_1 \cdot f_2 \cdot \sin\varphi}{2} = \frac{e_1 \cdot e_2 \cdot f_1 \cdot f_2 \cdot \sin^2\varphi}{4},$$

$$T_{BCO} \cdot T_{DAO} = \frac{e_1 \cdot f_1 \cdot \sin\varphi}{2} \cdot \frac{f_2 \cdot e_2 \cdot \sin\varphi}{2} = \frac{e_1 \cdot e_2 \cdot f_1 \cdot f_2 \cdot \sin^2\varphi}{4}.$$

A „szemközti” négyszögek területének szorzata valóban egyenlő.

4271 *a)* A 4270. feladat állítása alapján:



$$T_{ABO} \cdot T_{CDO} = T_{BCO} \cdot T_{DAO},$$

azaz

$$8 \cdot 2 = 4 \cdot T_{DAO},$$

amiből

$$T_{DAO} = 4\ \text{cm}^2.$$

Az $ABCD$ négyszög területe:

$$8 + 2 + 4 + 4 = 18\ \text{cm}^2.$$

b) Mivel

$$T_{ABD} = T_{ABO} + T_{DAO} = 8 + 4 = 12\ \text{cm}^2,$$

valamint

$$T_{ABC} = T_{ABO} + T_{BCO} = 8 + 4 = 12\ \text{cm}^2,$$

ezért

$$T_{ABD} = T_{ABC}.$$

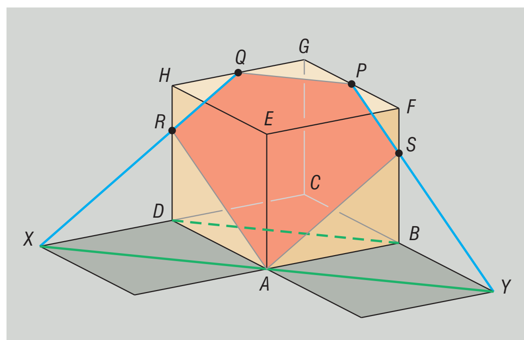
Ha a két háromszög közös AB oldalához az $ABD_\triangle$-ben m_1, az $ABC_\triangle$-ben pedig m_2 magasság tartozik, akkor:

$$\frac{AB \cdot m_1}{2} = \frac{AB \cdot m_2}{2},$$

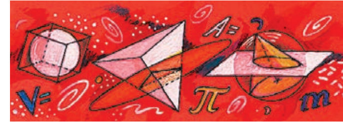
$$m_1 = m_2.$$

Ez azt is jelenti, hogy a C és D pontok ugyanakkora távolságra vannak az AB szakasztól, ezért CD párhuzamos AB-vel. Ebből következik, hogy az $ABCD$ négyszög valóban trapéz.

4272 *a)* A metsző sík az A, P és Q pontokon kívül még a kocka DH és BF éleit metszi. Ha a sík a DH élt az R, a BF élt az S pontban metszi, akkor a síkmetszet az $ASPQR$ ötszög.



b) A QP szakasz középvonala a $HFG_\triangle$-nek, ezért QP párhuzamos a kocka HF lapátlójával. Mivel egy sík párhuzamos síkokból párhuzamos egyeneseket metsz ki, ezért az APQ sík a kocka $ABCD$ alaplapjának síkját is egy HF-fel párhuzamos egyenesben metszi.



Ebből következik, hogy ha a QR egyenes a DC egyenest az X, a PS egyenes a CB egyenest pedig az Y pontban metszi, akkor XY párhuzamos HF-fel és így párhuzamos a BD lapátlóval is. Ekkor azonban az $ABDX$ négyszög paralelogramma, ezért:

$$DX = BA = 18 \text{ cm} \quad \text{és} \quad BY = DA = 18 \text{ cm}.$$

Vizsgáljuk meg az XDR és QHR háromszögeket. Mindkét háromszög derékszögű, valamint az R csúcsnál lévő szögeik csúcsszögek, ezért a két háromszög hasonló egymáshoz. A megfelelő oldalaikra:

$$\frac{DR}{HR} = \frac{DX}{HQ} = 2,$$

ezért az R pont a DH él D-hez közelebbi harmadolópontja, így:

$$DR = 12 \text{ cm} \quad \text{és} \quad HR = 6 \text{ cm}.$$

Ugyanilyen megfontolásból:

$$BS = 12 \text{ cm} \quad \text{és} \quad FS = 6 \text{ cm}.$$

Az $ASPQR$ ötszög minden oldala átfogója egy-egy olyan derékszögű háromszögnek, amelynek befogói illeszkednek a kocka éleire, így már könnyen kiszámíthatjuk az ötszög oldalait:

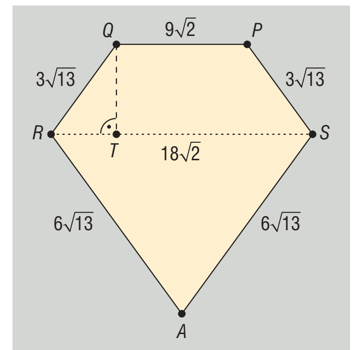
$$QP = \sqrt{9^2 + 9^2} = 9\sqrt{2} \ (\approx 12{,}73 \text{ cm}),$$

$$PS = QR = \sqrt{9^2 + 6^2} = 3\sqrt{13} \ (\approx 10{,}82 \text{ cm}),$$

$$AR = AS = \sqrt{18^2 + 12^2} = 6\sqrt{13} \ (\approx 21{,}63 \text{ cm}).$$

Mivel az $RSBD$ négyszög is paralelogramma (sőt igazából téglalap), ezért:

$$RS = 18\sqrt{2} \ (\approx 25{,}46 \text{ cm}).$$



Az ötszög területe az RSA egyenlő szárú háromszög, valamint az $RSPQ$ húrtrapéz területének összege.

Az $RSA_\triangle$ területét Heron képletével számolhatjuk:

$$T_{RSA} = \sqrt{\left(6\sqrt{13} + 9\sqrt{2}\right) \cdot \left(9\sqrt{2}\right)^2 \cdot \left(6\sqrt{13} - 9\sqrt{2}\right)} =$$
$$= 54\sqrt{17} \quad \left(\approx 222{,}65 \text{ cm}^2\right).$$

Az $RSPQ$ húrtrapéz területéhez szükségünk van a trapéz QT magasságára. Az RQT derékszögű háromszögben:

$$RT = \frac{18\sqrt{2} - 9\sqrt{2}}{2} = \frac{9\sqrt{2}}{2} \ (\approx 6{,}36 \text{ cm}).$$

Pitagorasz tétele alapján:

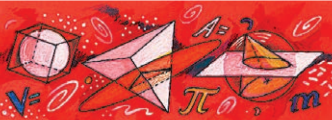
$$QT = \sqrt{\left(3\sqrt{13}\right)^2 - \left(\frac{9\sqrt{2}}{2}\right)^2} = 3\sqrt{\frac{17}{2}} \ (\approx 8{,}75 \text{ cm}).$$

Az $RSPQ$ trapéz területe:

$$T_{RSPQ} = \frac{18\sqrt{2} + 9\sqrt{2}}{2} \cdot 3\sqrt{\frac{17}{2}} = \frac{81\sqrt{17}}{2} \quad \left(\approx 166{,}99 \text{ cm}^2\right).$$

Az $ASPQR$ ötszög területe:

$$T_{ASPQR} = 54\sqrt{17} + \frac{81\sqrt{17}}{2} = \sqrt{17} \cdot \frac{189}{2} \quad \left(\approx 389{,}63 \text{ cm}^2\right).$$



A kör és részeinek területe – megoldások

4273 Az ábrák alapján egy paralelogramma területével közelíthetjük a kör területét. A paralelogramma egyik oldala r, a másik oldala a kör kerületének nyolcadrésze. Ha a körcikkek középponti szögét csökkentjük, akkor a paralelogramma szögei egyre jobban „megközelítik” a 90°-os szöget, így a paralelogramma határhelyzete egy téglalap. A fentiek alapján a kör T területére a következő becslést adhatjuk:

$$\frac{T}{4} \approx r \cdot K_{\text{nyolcadkör}}, \text{ amiből } T \approx r \cdot K_{\text{félkör}}, \text{ azaz } T \approx r \cdot r \cdot \pi = r^2 \cdot \pi.$$

4274 *a)* $t \approx 14{,}18 \text{ cm}^2$, $i \approx 5{,}67$ cm;
b) $t \approx 169{,}65 \text{ cm}^2$, $i \approx 28{,}27$ cm;
c) $t \approx 405{,}57 \text{ cm}^2$, $i \approx 62{,}40$ cm;
d) $t \approx 33{,}51 \text{ cm}^2$, $i \approx 8{,}38$ cm;
e) $t \approx 203{,}58 \text{ cm}^2$, $i \approx 22{,}62$ cm.

4275 *a)* $\alpha \approx 85{,}94°$; *b)* $\alpha \approx 299{,}95°$; *c)* $\alpha \approx 120{,}03°$.

4276 $11{,}18 \text{ cm}^2$, illetve $67{,}36 \text{ cm}^2$.

4277 A húr hossza 12,90 cm. A nagyobb körszelet területe $435{,}96 \text{ cm}^2$.

4278 *a)* $T \approx 74{,}99 \text{ cm}^2$; *b)* $T \approx 254{,}47 \text{ cm}^2$.

4279 $111{,}33 \text{ cm}^2$.

4280 $351{,}86 \text{ cm}^2$.

4281 A kisebb körgyűrű területe $16\pi \approx 50{,}27 \text{ cm}^2$, a nagyobbé $24\pi \approx 75{,}40 \text{ cm}^2$.

4282 A motívumokat egy $115\pi \approx 361{,}28 \text{ cm}^2$ területű részen helyezték el.

4283 *a)* 125 Ft-ba; *b)* 540 Ft-ba; *c)* 160 Ft-ba; *d)* 955 Ft-ba.
Látható, hogy a gyakorlatban a pizza ára nem egyenesen arányos a területével.

4284 A háromszög köré írt kör sugara kétszer akkora, mint a beírt kör sugara, ezért területük aránya 4.

4285 Az aszfaltozásra váró terület a következő részekből tevődik össze: 8 darab téglalap alakú rész a pavilon oldalai mentén, illetve 8 darab körcikk alakú rész a pavilon sarkainál. Egy-egy téglalap alakú rész szélessége 0,5 m, hosszúsága 2 m, így a téglalap alakú részek területének összege:

$$T_1 = 8 \cdot 0{,}5 \cdot 2 = 8 \text{ m}^2.$$

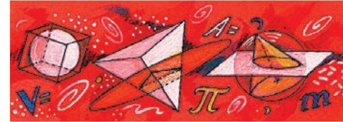
A körcikkek sugara 0,5 m. A szabályos nyolcszög egy belső szöge 135°-os, ezért egy körcikk középponti szöge:

$$360° - (135° + 90° + 90°) = 45°.$$

Mivel $8 \cdot 45° = 360°$, ezért a pavilon nyolc sarkánál lévő körcikkekből éppen egy 0,5 m sugarú kört lehet „összeállítani”. A körcikkek területösszege ennek megfelelően:

$$T_2 = 0{,}5^2 \cdot \pi \approx 0{,}8 \text{ m}^2.$$

Összesen $8{,}8 \text{ m}^2$ területű részt kell leaszfaltozni.



4286 A kisebb területű körgyűrű területe:

$$t=\left(\left(\frac{R+r}{2}\right)^2-r^2\right)\cdot\pi,$$

a nagyobb területűé:

$$T=\left(R^2-\left(\frac{R+r}{2}\right)^2\right)\cdot\pi.$$

Felhasználva az $a^2-b^2=(a+b)\cdot(a-b)$ azonosságot, a két terület aránya:

$$\frac{t}{T}=\frac{\frac{R+r-2r}{2}\cdot\frac{R+r+2r}{2}}{\frac{2R+R+r}{2}\cdot\frac{2R-R-r}{2}}=\frac{R+3r}{3R+r}.$$

4287 *a)* Ez a kör a két koncentrikus kör középköre, amelynek sugara:

$$r_1=\frac{r+R}{2}.$$

A körgyűrű szélességét felező kör sugara a két határoló kör sugarának számtani közepe.

b) Ha a keresett kör sugara r_2, akkor:

$$\frac{r_2^2\cdot\pi-r^2\cdot\pi}{R^2\cdot\pi-r_2^2\cdot\pi}=\frac{r}{R},$$

amiből a törtek eltüntetése és egyszerűsítés után:

$$r_2^2\cdot R-r^2\cdot R=r\cdot R^2-r\cdot r_2^2.$$

Az r_2-t tartalmazó tagokat egy oldalra csoportosítva:

$$r_2^2\cdot R+r\cdot r_2^2=r\cdot R^2+r^2\cdot R,$$
$$r_2^2\cdot(R+r)=r\cdot R\cdot(R+r),$$
$$r_2^2=r\cdot R,$$
$$r_2=\sqrt{r\cdot R}.$$

A körgyűrűt $r:R$ területarányú részekre osztó kör sugara a két határoló kör sugarának mértani közepe.

c) A körgyűrű területét felező kör sugarát r_3-mal jelölve:

$$R^2\cdot\pi-r_3^2\cdot\pi=r_3^2\cdot\pi-r^2\cdot\pi,$$

amiből egyszerűsítés és rendezés után:

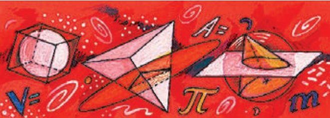
$$r_3^2=\frac{R^2+r^2}{2}\quad\Rightarrow\quad r_3=\sqrt{\frac{R^2+r^2}{2}}.$$

A körgyűrű területét felező kör sugara a két határoló kör sugarának négyzetes közepe.

d) Mivel a kapott közepek közül a mértani a legkisebb, annál nagyobb a számtani, végül a négyzetes a legnagyobb, ezért:

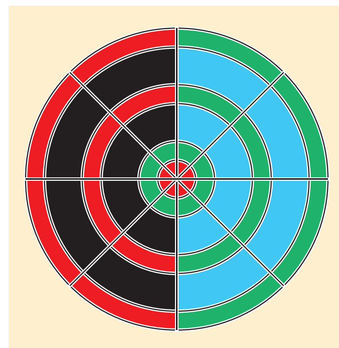
$$r_2<r_1<r_3.$$

Megjegyzés: A közepek között ezúttal egyenlőség nem fordulhat elő a $R>r$ feltétel miatt. A körök közül a legkisebb a „belső” körhöz van közelebb, az *a)* feladatban kapott kör a határoló köröktől egyenlő távolságra van, míg a *c)* feladat köre a „külső” határoló körhöz van közelebb.



4288 *a)* Az azonos színnel jelölt részek területösszegét könnyebb kiszámolni, ha az azonos színeket egymás mellé forgatjuk (ld. ábra). A tábla fekete része két körgyűrűcikket alkot. Mindkét rész a megfelelő körgyűrű területének fele, ezért a feketével jelölt terület:

$$T_1 = \frac{1}{2} \cdot \left[\left(31^2 - 23^2\right) \cdot \pi + \left(18^2 - 10^2\right) \cdot \pi \right] =$$
$$= 328\pi \approx 1030{,}44 \text{ cm}^2.$$



b) A zölddel megjelölt részek területösszege:

$$T_2 = \left(10^2 - 5^2\right) \cdot \pi + \frac{1}{2} \cdot \left[\left(36^2 - 31^2\right) \cdot \pi + \left(23^2 - 18^2\right) \cdot \pi \right] =$$
$$= 345\pi \approx 1083{,}85 \text{ cm}^2.$$

c) A pirossal megjelölt részek területe közvetlenül is számolható, de akár úgy is, hogy a „legkülső" kör területéből kivonjuk a többi színnel megjelölt részek területét. A legnagyobb kör területe:

$$T = 36^2 \cdot \pi = 1296\pi \approx 4071{,}50 \text{ cm}^2.$$

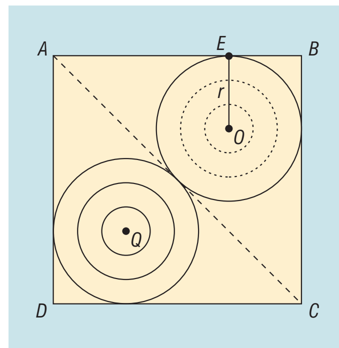
Mivel a kék és fekete részek területe megegyezik, ezért a piros területrészek összege:

$$T_3 = T - 2 \cdot T_1 - T_2 = 1296\pi - 656\pi - 345\pi = 295\pi \approx 926{,}77 \text{ cm}^2.$$

Bence a piros részt az alábbi valószínűséggel találja el:

$$\frac{T_3}{T} = \frac{295}{1296} \approx 0{,}2276.$$

4289 *a)* Jelöljük az eredeti hungarocelltábla sarkait az A, B, C és D pontokkal, a két kivágott kör középpontját O-val és Q-val. Az O középpontú kör az ACB egyenlő szárú derékszögű háromszög beírt köre. A kör r sugarát az ACB háromszög területéből számolhatjuk ki. Mivel a háromszög befogói 2 m hosszúak, ezért:



$$T_{ACB} = 2 \text{ m}^2.$$

Ha a háromszög kerületének felét s jelöli, akkor:

$$s = \frac{2 + 2 + 2\sqrt{2}}{2} = 2 + \sqrt{2} \approx 3{,}41 \text{ m}.$$

Az ismert területképlet alapján:

$$r = \frac{T_{ACB}}{s} = \frac{2}{2 + \sqrt{2}} = 2 - \sqrt{2} \approx 0{,}59 \text{ m}.$$

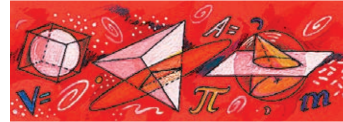
Az egyik céltábla területe:

$$T = \left(2 - \sqrt{2}\right)^2 \cdot \pi \approx 1{,}08 \text{ m}^2,$$

tehát a táblának körülbelül

$$\frac{2 - 1{,}08}{2} \cdot 100 = 46\%\text{-a}$$

veszett kárba.



b) Egy céltáblán a pirosra festett rész területe:

$$\left(\frac{r}{3}\right)^2 \cdot \pi \approx 0{,}12\ \text{m}^2.$$

c) Marci a sárga részt

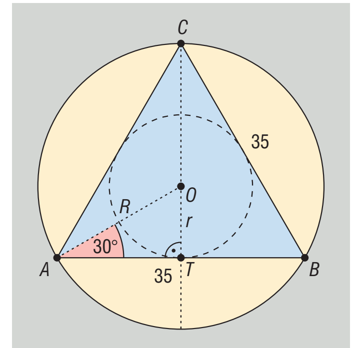
$$\frac{r^2 \cdot \pi - \left(\frac{2}{3} \cdot r\right)^2 \cdot \pi}{r^2 \cdot \pi} = \frac{5}{9}$$

valószínűséggel találja el. A legértékesebb (piros) rész találatának valószínűsége:

$$\frac{\left(\frac{r}{3}\right)^2 \cdot \pi}{r^2 \cdot \pi} = \frac{1}{9}.$$

Látható, hogy Marci a sárga részt 5-ször akkora valószínűséggel találja el, mint a pirosat.

4290 *a)* A virágtartó tetejét teljes egészében lefedő terítők közül a háromszög köré írható kör sugara a legkisebb. Az ABC szabályos háromszög köré írható kör O középpontja egybeesik a háromszög magasságpontjával, valamint beírható körének középpontjával is. Ha a C csúcsból induló magasságvonal talppontja T, akkor az AOT derékszögű háromszög A csúcsánál 30º-os szög van, ezért ha a körülírt kör sugara R, akkor:



$$\cos 30º = \frac{AT}{R},$$

$$R = \frac{35\sqrt{3}}{3} \approx 20{,}21\ \text{cm}.$$

A virágtartót lefedő legkisebb kör alakú terítő területe körülbelül $1282{,}82\ \text{cm}^2$.

b) A virágtartón elférő legnagyobb kör alapú cserép r sugara megegyezik az $ABC_\triangle$-be írt kör sugarával. Az AOT derékszögű háromszögből:

$$\text{tg}\, 30º = \frac{r}{AT},$$

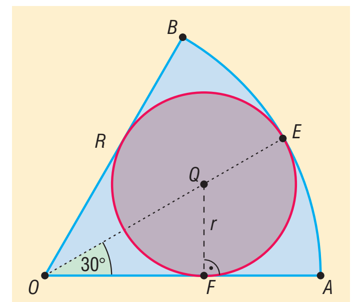
$$r = \frac{\sqrt{3}}{3} \cdot \frac{35}{2} \approx 10{,}10\ \text{cm}.$$

A legnagyobb virágcserép alapterülete körülbelül $320{,}70\ \text{cm}^2$.

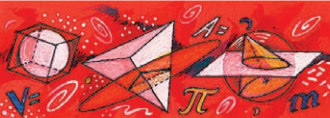
c) A terítő és a virágcserép alapköre sugarának aránya 2.

d) A terítő területe a virágcserép alapterületének 4-szerese.

4291 A körcikkből kivágható legnagyobb kör érinti a határoló körívet, valamint a körcikk két sugarát. Ebből következik, hogy a kivágandó kör Q középpontja illeszkedik a körcikk középponti szögének szögfelezőjére. Ha a körcikk sugarát R, a körét r jelöli, továbbá a körcikk határoló körívével való érintési pont E, az OA sugárral pedig F (ld. ábra), akkor az OQF derékszögű háromszögben:



$$\sin 30º = \frac{r}{OQ} \quad \Rightarrow \quad r = \frac{OQ}{2}.$$



Mivel az O, Q és E pontok egy egyenesre illeszkednek, ezért:

$$OQ = OE - QE = R - r,$$

így:

$$r = \frac{R - r}{2} = \frac{R}{3}.$$

A körcikk területe:

$$T = \frac{R^2 \cdot \pi}{6},$$

a beírt kör területe:

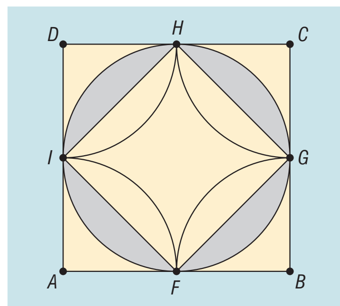
$$t = \frac{R^2 \cdot \pi}{9},$$

a hulladéké pedig:

$$T_{\text{hulladék}} = T - t = \frac{R^2 \cdot \pi}{18},$$

így a hulladék a körcikknek 33,33%-a.

4292 *a)* Az alábbi ábrán berajzoltuk az $ABCD$ négyzet oldalfelező pontjait, valamint az így kialakult $FGHI$ négyzetet. A satírozással megjelölt rész területe jól láthatóan feleakkora, mint az eredeti ábrán megjelölt részek területösszege. Ha az $ABCD$ négyzet oldala a, akkor az ábrán szürkével jelölt körszeletek területösszege az $ABCD$ négyzetbe írt kör, valamint az $FGHI$ négyzet területének különbsége, azaz:



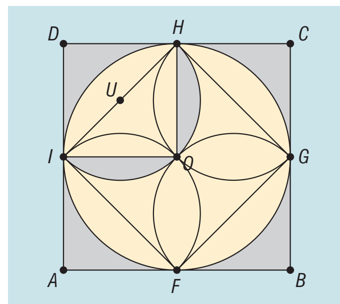
$$T = \left(\frac{a}{2}\right)^2 \cdot \pi - \frac{a^2}{2} = a^2 \cdot \frac{\pi - 2}{4}.$$

Az eredeti ábra szürkével jelölt síkidomainak területösszege:

$$2 \cdot T = a^2 \cdot \frac{\pi - 2}{2},$$

ami a négyzet területének 57%-a.

b) Az $ABCD$ négyzetbe írt körön kívül eső részek területösszege:



$$T_1 = a^2 - \left(\frac{a}{2}\right)^2 \cdot \pi = a^2 \cdot \frac{4 - \pi}{4}.$$

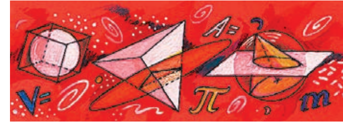
A körön belüli részt összesen 8 körszeletre bonthatjuk, melyek közül az ábrán szürkével jelölt 2 körszelet területösszege az IH átmérőjű, U középpontú félkör és az IHO derékszögű háromszög területének különbsége, azaz:

$$T_2 = \frac{\left(\frac{a\sqrt{2}}{4}\right)^2 \cdot \pi}{2} - \frac{\frac{a}{2} \cdot \frac{a}{2}}{2} = a^2 \cdot \frac{\pi - 2}{16}.$$

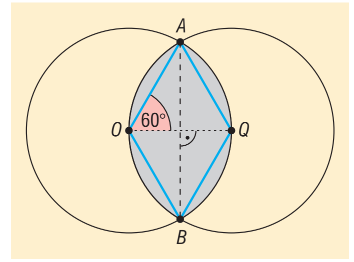
Az eredetileg szürkével jelölt részek területösszege:

$$T = T_1 + 4 \cdot T_2 = a^2 \cdot \left(\frac{4 - \pi}{4} + 4 \cdot \frac{\pi - 2}{16}\right) = \frac{a^2}{2}.$$

A négyzetnek tehát pont a fele, azaz 50%-a van beszínezve.



4293 a) Az $OAQB$ négyszög minden oldala 12 cm, ezért a négyszög rombusz. A rombusz OQ átlója szintén 12 cm, AB átlója pedig az AOQ és BOQ szabályos háromszögek magasságainak összege, azaz:



$$AB = 2 \cdot 12 \cdot \frac{\sqrt{3}}{2} = 12\sqrt{3} \quad (\approx 20{,}78 \text{ cm}).$$

Az $OAQB$ rombusz területe:

$$T_{OAQB} = \frac{12 \cdot 12\sqrt{3}}{2} = 72\sqrt{3} \quad (\approx 124{,}71 \text{ cm}^2).$$

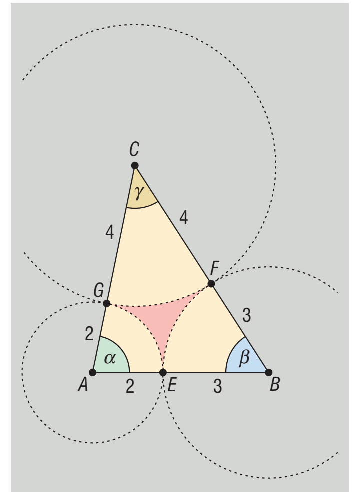
b) A szürkével megjelölt rész az $OAQB$ rombuszra, valamint 4 darab egybevágó körszeletre bontható. Egy ilyen körszelet területe kiszámolható a 60°-os középponti szöggel rendelkező körcikk, valamint a 12 cm oldalú szabályos háromszög területének különbségeként, azaz:

$$t = \frac{12^2 \cdot \pi}{6} - \frac{12^2 \cdot \frac{\sqrt{3}}{2}}{2} = 24\pi - 36\sqrt{3} \quad (\approx 13{,}04 \text{ cm}^2).$$

A szürke rész területe:

$$T = T_{OAQB} + 4 \cdot t = 72\sqrt{3} + 96\pi - 144\sqrt{3} = 96\pi - 72\sqrt{3} \approx 176{,}89 \text{ cm}^2.$$

4294 A három kör középpontja által közrefogott $ABC_\triangle$ oldalai a sugarakból adódnak: $AB = 5$ cm, $BC = 7$ cm, $AC = 6$ cm (ld. ábra). Ha az érintési pontokat E, F és G jelöli, akkor a feladat a körívek által határolt EFG síkidom területét kérdezi. E síkidom területét megkapjuk, ha az $ABC_\triangle$ területéből kivonjuk az $ABC_\triangle$ csúcsai mint középpontok köré írt körcikkek területét (az egyik ilyen körcikk például az A középpontú α középponti szögű, 2 cm sugarú körcikk).



Az $ABC_\triangle$ területét Heron képletével számolhatjuk:

$$T_{ABC} = \sqrt{9 \cdot 4 \cdot 2 \cdot 3} = 6\sqrt{6} \quad (\approx 14{,}70 \text{ cm}^2).$$

A háromszög szögeit koszinusztétellel számíthatjuk ki:

$$\cos\alpha = \frac{5^2 + 6^2 - 7^2}{2 \cdot 5 \cdot 6} = \frac{1}{5}, \qquad \text{amiből} \qquad \alpha \approx 78{,}46°.$$

A háromszög további szögei: $\beta \approx 57{,}12°$, $\gamma \approx 44{,}42°$.

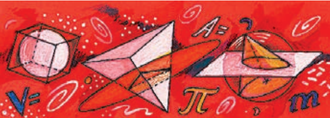
A háromszög csúcsai köré írt körcikkek területe:

$$t_\alpha = \frac{2^2 \cdot \pi \cdot \alpha}{360°} \approx 2{,}74 \text{ cm}^2,$$

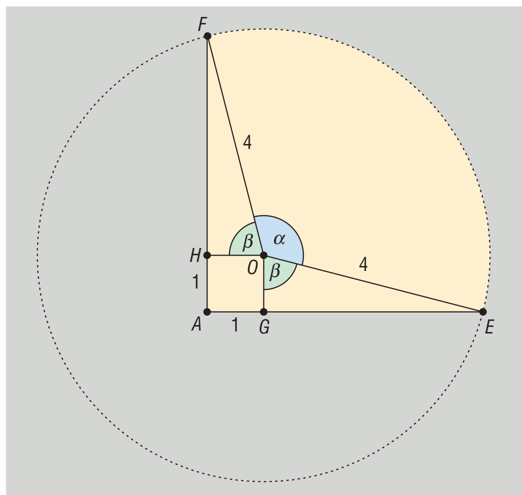
$$t_\beta = \frac{3^2 \cdot \pi \cdot \beta}{360°} \approx 4{,}49 \text{ cm}^2,$$

$$t_\gamma = \frac{4^2 \cdot \pi \cdot \gamma}{360°} \approx 6{,}20 \text{ cm}^2.$$

Ha az $ABC_\triangle$ területéből kivonjuk a körcikkek területét, a körök által határolt síkidom területére 1,27 cm^2 adódik.



4295 A telek területe 225 m^2. Az ábra jelöléseit követve tegyük fel, hogy Béla bácsi az öntözőberendezést az O pontba, a telek A csúcsához rakta legközelebb. A meglocsolt terület a következő részekre bontható: az 1 m oldalú $AGOH$ négyzet, a 4 m hosszú átfogóval rendelkező EOG és FHO egybevágó derékszögű háromszögek, valamint az O középpontú, az ábrán α-val jelölt középponti szögű, 4 m sugarú körcikk.



Az $AGOH$ négyzet területe 1 m^2.

Az EOG háromszögben:

$$\cos\beta = \frac{1}{4}, \qquad \text{amiből} \qquad \beta \approx 75{,}52°.$$

Az EOG (és a vele egybevágó FHO) háromszög területe:

$$T_{EOG} = \frac{1 \cdot 4 \cdot \sin\beta}{2} \approx 1{,}94 \text{ m}^2.$$

A körcikk alakú rész középponti szögére:

$$\alpha = 360° - 90° - 2\beta \approx 118{,}96°,$$

területe pedig:

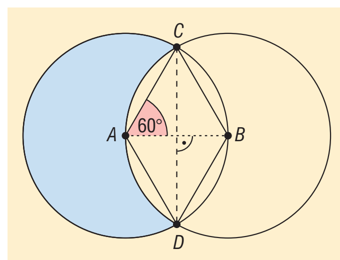
$$T_{\text{körcikk}} = \frac{4^2 \cdot \pi \cdot \alpha}{360°} \approx 16{,}61 \text{ m}^2.$$

Béla bácsi az öntözőberendezéssel körülbelül

$$1 + 2 \cdot 1{,}94 + 16{,}61 = 21{,}49 \text{ m}^2$$

területű részt tud meglocsolni a kertjéből, ami a kertnek körülbelül 9,6%-a.

4296 *a)* Egy hold alakú tészta területét úgy számolhatjuk ki, hogy a 4 cm sugarú kör területéből kivonjuk a két metsző helyzetű kör közös részének területét. A két kör közös része tovább bontható az $ADBC$ rombuszra (ld. ábra), valamint négy egybevágó körszeletre; az egyik ilyen körszeletet a BC húr vágja le az A középpontú, 60°-os középponti szöggel rendelkező körcikkből. A körcikk területe:



$$T_{\text{körcikk}} = \frac{4^2 \cdot \pi}{6} \approx 8{,}38 \text{ cm}^2.$$

Az ABC szabályos háromszög területe:

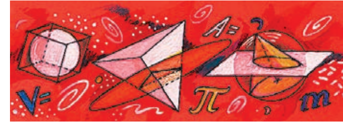
$$T_{ABC} = \frac{4^2 \cdot \frac{\sqrt{3}}{2}}{2} = 4\sqrt{3} \approx 6{,}93 \text{ cm}^2,$$

ezért a megfelelő körszelet területe:

$$T_{\text{körszelet}} = T_{\text{körcikk}} - T_{ABC} \approx 1{,}45 \text{ cm}^2.$$

Az $ADBC$ rombusz területe kétszerese az ABC háromszög területének, azaz:

$$T_{ADBC} = 8\sqrt{3} \approx 13{,}86 \text{ cm}^2.$$



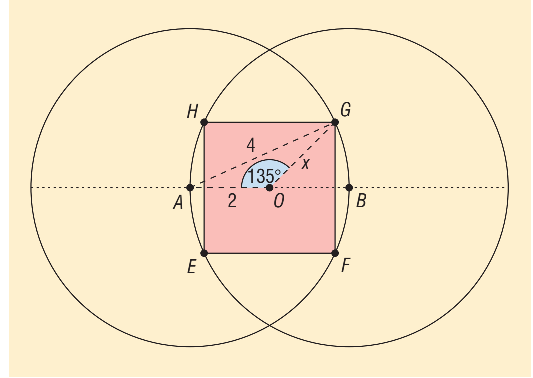
A két szomszédos kör közös részének területe:

$$T_{\text{metszet}} = T_{ADBC} + 4 \cdot T_{\text{körszelet}} \approx 19{,}66 \text{ cm}^2.$$

Egy hold alakú tészta területe:

$$4^2 \cdot \pi - 19{,}66 \approx 30{,}61 \text{ cm}^2.$$

b) A két kör közös részébe írt $EFGH$ négyzet területét kérdezi a feladat. Az ábra szimmetrikus az AB egyenesre, valamint az AB szakasz O felezőpontjára. Mindezekből következik, hogy az O pont egyben a négyzet középpontja is, ezért $AOG\sphericalangle = 135°$. Ha a GO szakasz hosszát x jelöli, akkor az AOG háromszögben a koszinusztétel alapján:



$$AG^2 = AO^2 + GO^2 - 2 \cdot AO \cdot GO \cdot \cos 135°,$$

$$4^2 = 2^2 + x^2 + 2 \cdot 2 \cdot x \cdot \frac{\sqrt{2}}{2},$$

amiből rendezés után:

$$x^2 + 2\sqrt{2} \cdot x - 12 = 0.$$

Az egyenlet megoldásai:

$$x_1 = \sqrt{14} - \sqrt{2} \quad \text{és} \quad x_2 = -\sqrt{14} - \sqrt{2}.$$

Mivel x_2 negatív, ezért:

$$x = \sqrt{14} - \sqrt{2} \approx 2{,}33 \text{ cm}.$$

Az $EFGH$ négyzet átlója $2x$, ezért a négyzet oldala:

$$a = x\sqrt{2} = \left(\sqrt{14} - \sqrt{2}\right) \cdot \sqrt{2} = 2\sqrt{7} - 2 \approx 3{,}29 \text{ cm}.$$

A négyzet alakú tészták területe:

$$a^2 = 32 - 8\sqrt{7} \approx 10{,}83 \text{ cm}^2.$$

A térfogat fogalma, a hasáb és a henger térfogata – megoldások

4297 *a)* A kocka lapátlója: $7{,}5\sqrt{2} \approx 10{,}61$ cm.

b) A kocka testátlója: $7{,}5\sqrt{3} \approx 12{,}99$ cm.

4298 *a)* A kocka felszíne: 1200 cm^2.

b) A kocka térfogata: $2000\sqrt{2} \approx 2828{,}43 \text{ cm}^3$.

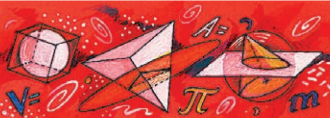
4299 *a)* A kocka felszíne: $100{,}77 \text{ cm}^2$.

b) A kocka térfogata: $68{,}82 \text{ cm}^3$.

4300 A két kocka éle 7 cm és 12 cm.

4301 A négyzetes oszlop térfogata: 250 cm^3.

4302 A téglatest felszíne: 286 cm^2.



4303 A tekercs 162 g alumíniumból készült.

4304 Egy raklapnyi tégla tömege: $1{,}085$ tonna.

4305 *a)* A téglatest térfogata: $1080\ \text{cm}^3$.
b) A téglatest felszíne: $636\ \text{cm}^2$.

4306 *a)* A hasáb felszíne: $72\sqrt{3}+720 \approx 844{,}71\ \text{cm}^2$.
b) A hasáb térfogata: $720\sqrt{3} \approx 1247{,}08\ \text{cm}^3$.

4307 *a)* A hasáb felszíne: $1728\sqrt{3}+6048 \approx 9040{,}98\ \text{cm}^2$.
b) A hasáb térfogata: $36\,288\sqrt{3} \approx 62\,852{,}66\ \text{cm}^3$.

4308 *a)* A hasáb felszíne: $18\sqrt{91}+760 \approx 931{,}71\ \text{cm}^2$.
b) A hasáb térfogata: $180\sqrt{91} \approx 1717{,}09\ \text{cm}^3$.

4309 A hasáb egy éle: 5 cm.

4310 A hasáb térfogata: $3888\ \text{cm}^3$.

4311 A ferde hasáb térfogata: $5508{,}32\ \text{cm}^3$.

4312 A forgástest térfogata: $125\pi \approx 392{,}70\ \text{cm}^3$, a felszíne: $100\pi \approx 314{,}16\ \text{cm}^2$.

4313 *a)* A forgástest térfogata: $360\pi \approx 1130{,}97\ \text{cm}^3$, a felszíne: $192\pi \approx 603{,}19\ \text{cm}^2$.
b) A forgástest térfogata: $300\pi \approx 942{,}48\ \text{cm}^3$, a felszíne: $170\pi \approx 534{,}07\ \text{cm}^2$.

4314 A pohárba megközelítőleg $1{,}70$ dl víz fér.

4315 A körhenger térfogata: $288\pi \approx 904{,}78\ \text{cm}^3$, a felszíne: $176\pi \approx 552{,}92\ \text{cm}^2$.

4316 A körhenger térfogata lehet $1080\pi \approx 3392{,}92\ \text{cm}^3$ vagy $2700\pi \approx 8482{,}30\ \text{cm}^3$.

4317 A bögre térfogata megközelítőleg $3{,}85$ dl, így elfér benne a kakaó.

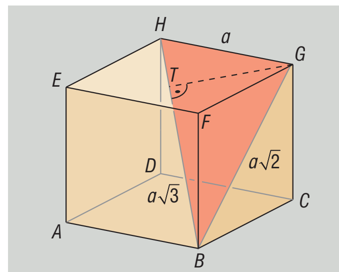
4318 A körhenger felszíne: $231{,}83\ \text{cm}^2$, térfogata: $225{,}08\ \text{cm}^3$.

4319 A henger térfogata: $425\pi \approx 1335{,}18\ \text{cm}^3$.

4320 A henger térfogata: $1536\pi \approx 4825{,}49\ \text{cm}^3$.

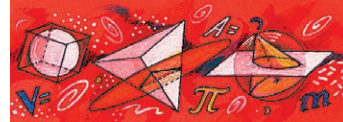
4321 *a)* A test $8\cdot 1+12\cdot 3=44$ egységkockából áll, tehát térfogata 44 térfogategység.
b) Az eredeti kocka 6 oldallapjából $6\cdot\left(5^2-3^2\right)=96$ területegység maradt meg, ehhez még a 12 él mentén belül $12\cdot 6=72$ területegység adódik, tehát a test felszíne 168 területegység.

4322 Az ábrán látható a élű kocka HB testátlójának a G csúcstól mért távolsága GT. A BGH derékszögű háromszög területét kétféleképpen felírva:



$$\frac{a\sqrt{3}\cdot GT}{2}=\frac{a\cdot a\sqrt{2}}{2},$$
$$\frac{a\sqrt{3}\cdot 16{,}33}{2}=\frac{a\cdot a\sqrt{2}}{2},$$
$$a \approx 20.$$

A kocka térfogata $8000\ \text{cm}^3$.



4323 Befektető Béla mobiltelefonjának térfogata:

$$V = abc = 108{,}8 \cdot 46{,}2 \cdot 11{,}7 \approx 58\,810{,}75 \text{ mm}^3 = 58{,}81075 \text{ cm}^3.$$

a) Az aranyrúd tömege:

$$m = V \cdot \rho = 1135{,}05 \text{ gramm.}$$

b) Az aranyrúd $\frac{1135{,}05}{31{,}103} = 36{,}49$ uncia tömegű, amelynek ára:

$$36{,}49 \cdot 1161 \cdot 182 \approx 7\,710\,410 \text{ forint.}$$

c) A 7000 tonna arany térfogata 362,69 m^3. Ha ennyi aranyat hézagmentesen elhelyeznének a 10×20 méteres medencébe, akkor „csak” 1,81 m magasan állna benne az arany, tehát a teljes mennyiség elférne az úszómedencében.

4324 A csomag hosszúsága legyen $3x$, szélessége $2x$, magassága x:

$$2 \cdot 3x + 4 \cdot 2x + 6 \cdot x + 20 = 260 \quad \Rightarrow \quad x = 12.$$

a) A csomag oldalélei: 36 cm, 24 cm és 12 cm.

b) A becsomagoláshoz szükséges papír területe:

$$\frac{A}{0{,}96} = \frac{2 \cdot (ab + ac + bc)}{0{,}96} =$$

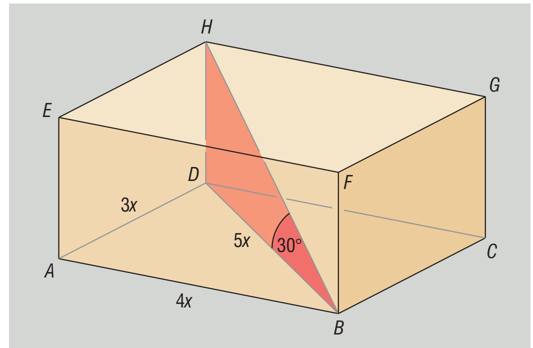
$$= \frac{2 \cdot (36 \cdot 24 + 36 \cdot 12 + 12 \cdot 24)}{0{,}96} = 3300 \text{ cm}^2 = 33 \text{ dm}^2.$$

c) A téglatest testátlója:

$$e = \sqrt{a^2 + b^2 + c^2} = \sqrt{36^2 + 24^2 + 12^2} \approx 44{,}90 \text{ cm},$$

tehát nem fér el a csomagban egy 50 cm hosszú rúd.

4325 Legyen a téglatest $ABCD$ lapjának két éle $3x$ és $4x$ hosszúságú. Az ábra jelöléseit használva láthatjuk, hogy a $BDH_\triangle$ egy szabályos háromszög fele. A háromszög hosszabbik befogója az $5x$ hosszúságú lapátló, a rövidebbik befogó a téglatest harmadik éle, az átfogó pedig a téglatest testátlója.



A háromszögben ismert összefüggések alapján a téglatest harmadik élének hossza:

$$HD = \frac{HB}{2} = \frac{50}{2} = 25 \text{ cm},$$

illetve a téglatest 50 cm-es HB testátlójára fennáll:

$$50 \cdot \frac{\sqrt{3}}{2} = 5x \quad \Rightarrow \quad x = 5\sqrt{3}.$$

A téglatest éleinek hossza: $15\sqrt{3}$ cm, $20\sqrt{3}$ cm és 25 cm.

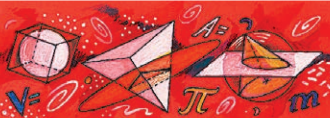
a) A téglatest felszíne:

$$A = 2 \cdot (ab + ac + bc) = 2 \cdot \left(15\sqrt{3} \cdot 20\sqrt{3} + 15\sqrt{3} \cdot 25 + 20\sqrt{3} \cdot 25\right) =$$

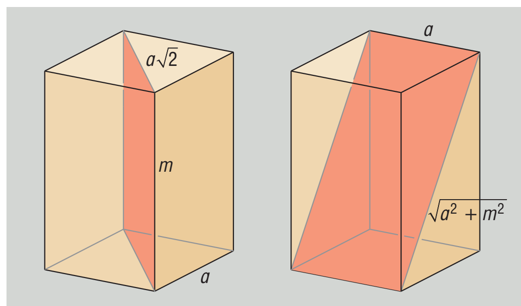
$$= 1800 + 1750\sqrt{3} \approx 4831{,}09 \text{ cm}^2.$$

b) A téglatest térfogata:

$$V = a \cdot b \cdot c = 15\sqrt{3} \cdot 20\sqrt{3} \cdot 25 = 22\,500 \text{ cm}^3.$$



4326 Legyen a négyzet alapú egyenes hasáb alapéle a, oldaléle m hosszúságú.



A síkmetszetek területéből:

$$\left.\begin{aligned} a\sqrt{2}\cdot m &= 60\sqrt{2} \\ a\sqrt{a^2+m^2} &= 65 \end{aligned}\right\}.$$

Az egyenletrendszert megoldva: $a = 5,\ m = 12$.

a) A hasáb felszíne: $A = 2a^2 + 4am = 290\ \text{cm}^2$.

b) A hasáb térfogata: $V = a^2 \cdot m = 300\ \text{cm}^3$.

4327 Az ötszög területe: $T = 5\cdot\dfrac{8^2\cdot\sin^2 54^\circ}{2\cdot\sin 72^\circ}$.

a) A hasáb felszíne:

$$A = 2T + k\cdot m = 2\cdot 5\cdot\frac{8^2\cdot\sin^2 54^\circ}{2\cdot\sin 72^\circ} + 40\cdot 22 \approx 1100{,}22\ \text{cm}^2.$$

b) A hasáb térfogata:

$$V = T\cdot m = 5\cdot\frac{8^2\cdot\sin^2 54^\circ}{2\cdot\sin 72^\circ}\cdot 22 \approx 2422{,}43\ \text{cm}^3.$$

4328 *a)* A szabályos nyolcszög alapú hasáb

alapéle: $a = 2\cdot 15\cdot\sin 22{,}5^\circ$;

fedőlapjának területe: $T = 8\cdot\dfrac{15^2\cdot\sin 45^\circ}{2}$.

A bevonandó felület:

$$T + 8\cdot am = 8\cdot\frac{15^2\cdot\sin 45^\circ}{2} + 8\cdot 2\cdot 15\cdot\sin 22{,}5^\circ\cdot 8 \approx 1371{,}15\ \text{cm}^2.$$

b) A szabályos tízszög alapú hasáb

alapéle: $b = 2\cdot 15\cdot\sin 18^\circ$;

fedőlapjának területe: $T' = 10\cdot\dfrac{15^2\cdot\sin 36^\circ}{2}$.

A bevonandó felület:

$$T' + 10\cdot bm' = 10\cdot\frac{15^2\cdot\sin 36^\circ}{2} + 10\cdot 2\cdot 15\cdot\sin 18^\circ\cdot 10 \approx 1588{,}31\ \text{cm}^2.$$

A Vera 10. születésnapjára készült tortán a bevonandó felület $\dfrac{1588{,}31}{1371{,}15}\cdot 100 - 100 \approx 15{,}84$ százalékkal lesz nagyobb, mint a 8. születésnapjára készített tortán.

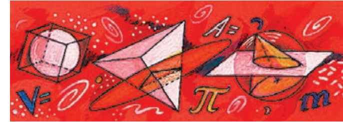
4329 Ha a hasáb alapéle a, akkor a befestendő terület:

$$t + A_{\text{palást}} = \frac{a^2\cdot\sqrt{3}}{4} + 2{,}5\cdot 3\cdot a = 6{,}28\ \text{m}^2.$$

Rendezés után a megoldandó másodfokú egyenlet:

$$\sqrt{3}\cdot a^2 + 30a - 25{,}12 = 0.$$

Az egyenlet pozitív megoldása 0,80. A hirdetőoszlop alapéle 80 cm.



4330 Mivel a hasáb két oldallapja 70°31'-os szöget zár be, és a területük aránya 2 : 3, az alaplap olyan háromszög, amelyben két oldal hosszát felírhatjuk $2x$ és $3x$ alakban, a két oldal által bezárt szög pedig 70°31'.

Mivel a hasáb harmadik oldallapjának területe 120 cm², és a hasáb magassága 20 cm, a háromszög harmadik oldala 6 cm hosszú.

A koszinusztételt felírva a háromszögben:

$$6^2 = (2x)^2 + (3x)^2 - 2\cdot(2x)\cdot(3x)\cdot\cos 70°31' \quad\Rightarrow\quad x \approx 2.$$

Az alaplap oldalélei 4 cm, 6 cm és 6 cm hosszúak.

A hasáb térfogata:

$$V = T\cdot m = \frac{4\cdot 6\cdot \sin 70°31'}{2}\cdot 20 \approx 226{,}26\ \text{cm}^3.$$

4331 A csatorna keresztmetszetének területe:

$$T = \frac{a+c}{2}\cdot m_{\text{trapéz}} = \frac{6+8}{2}\cdot 3 = 21\ \text{m}^2.$$

a) A csatorna egy óra alatt legfeljebb annyi vizet tud elvezetni, amennyi egy 21 m² alapterületű és $1{,}4\cdot 3600 = 5040$ m magasságú hasáb térfogata:

$$V = T\cdot m = 21\cdot 5040 = 105\,840\ \text{m}^3.$$

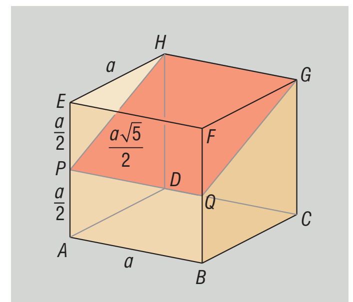
b) Ha a csatorna félig van vízzel, akkor a víz egy olyan trapéz alakú keresztmetszeten folyik le, amelynek alapjai 6 m és $\frac{6+8}{2} = 7$ m, magassága 1,5 m. A keresztmetszet területe:

$$T' = \frac{7+6}{2}\cdot 1{,}5 = 9{,}75\ \text{m}^2.$$

Így a csatorna által egy óra alatt elvezetett vízmennyiség annyi, mint egy 9,75 m² alapterületű és $0{,}9\cdot 3600 = 3240$ m magasságú hasáb térfogata:

$$V = T'\cdot m = 9{,}75\cdot 3240 = 31\,590\ \text{m}^3.$$

4332 A kocka éle $a = 10$ cm. A feladatban megadott sík az ábrán látható kockát két a magasságú hasábra vágja ketté.



A $PEHQFG$ hasáb alaplapja a PEH derékszögű háromszög, amelynek befogói a és $\frac{a}{2}$ hosszúságúak, átfogója pedig $\frac{a\sqrt{5}}{2}$ hosszúságú.

A PEH háromszög területe és kerülete:

$$T_{PEH} = \frac{a^2}{4} \qquad \text{és} \qquad k_{PEH} = \frac{3a}{2} + \frac{a\sqrt{5}}{2}.$$

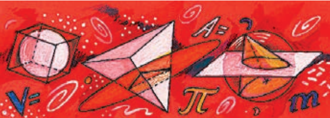
A $PEHQFG$ hasáb térfogata és felszíne:

$$V_{PEHQFG} = T_{PEH}\cdot a = \frac{a^3}{4} = 250\ \text{cm}^3,$$

$$A_{PEHQFG} = 2\cdot T_{PEH} + k_{PEH}\cdot a = 2\cdot\frac{a^2}{4} + \left(\frac{3a}{2} + \frac{a\sqrt{5}}{2}\right)\cdot a = \frac{4+\sqrt{5}}{2}\cdot a^2 \approx 311{,}80\ \text{cm}^3.$$

Az $ABCDPQGH$ hasáb térfogatát megkapjuk úgy, hogy a kocka térfogatából kivonjuk a $PEHQFG$ hasáb térfogatát:

$$V_{ABCDPQGH} = 1000 - 250 = 750\ \text{cm}^3.$$



Az *ABCDPQGH* hasáb alaplapja a *PADH* derékszögű trapéz, melynek területe és kerülete:

$$T_{PADH}=\frac{3a^2}{4} \quad \text{és} \quad k_{PADH}=\frac{5a}{2}+\frac{a\sqrt{5}}{2}.$$

Az *ABCDPQGH* hasáb felszíne:

$$A_{ABCDPQGH}=2\cdot T_{PADH}+k_{PADH}\cdot a=2\cdot\frac{3a^2}{4}+\left(\frac{5a}{2}+\frac{a\sqrt{5}}{2}\right)\cdot a=$$

$$=\frac{8+\sqrt{5}}{2}\cdot a^2\approx 511{,}80\ \text{cm}^2.$$

4333 A paralelepipedon alaplapjának területe:

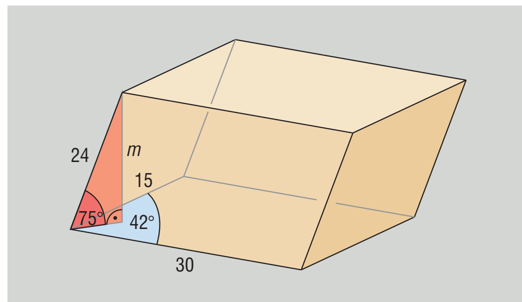
$$T=15\cdot 30\cdot \sin 42^\circ.$$

A paralelepipedon magassága:

$$m=24\cdot \sin 75^\circ.$$

A paralelepipedon térfogata:

$$V=T\cdot m=15\cdot 30\cdot \sin 42^\circ\cdot 24\cdot \sin 75^\circ\approx$$
$$\approx 6980{,}37\ \text{cm}^3.$$



4334 Ha az úszómedencében 90 cm magasan áll a víz, akkor a benne lévő víz térfogata:

$$V=r^2\cdot\pi\cdot m=1{,}8^2\cdot\pi\cdot 0{,}9\ \text{m}^3.$$

a) Mivel a csapból óránként $30\cdot 60=1800$ liter $=1{,}8\ \text{m}^3$ víz folyik, a medence ennyi vízzel

$$\frac{1{,}8^2\cdot\pi\cdot 0{,}9}{1{,}8}\approx 5{,}09$$

óra alatt tölthető fel.

b) A vízdíjunk éves emelkedése:

$$6\cdot V\cdot 542=6\cdot 1{,}8^2\cdot\pi\cdot 0{,}9\cdot 542=29\,791\ \text{forint}.$$

4335 Az a élű építőkocka térfogata egyenlő egy olyan henger térfogatával, amely alapkörének sugara 11 cm, magassága 1 cm:

$$a^3=r^2\cdot\pi\cdot m=11^2\cdot\pi\cdot 1 \quad\Rightarrow\quad a\approx 7{,}24.$$

Bendegúz építőkockája 7,24 cm élű.

4336 A maximálisan felfogható csapadék mennyisége:

$$V_f=T\cdot m_1=120\cdot 8\cdot 10^{-3}=0{,}96\ \text{m}^3.$$

A hordó térfogata:

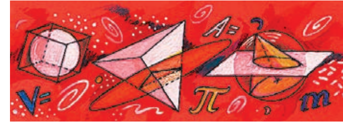
$$V=r^2\cdot\pi\cdot m_2=0{,}4^2\cdot\pi\cdot 1{,}2=0{,}60\ \text{m}^3,$$

tehát a hordó megtelt esővízzel.

4337 A kád egyszeri festéséhez a kád palástját és alaplapját kétszer kell lefesteni. Háromszori festéshez a lefestendő terület:

$$A=3\cdot 2\cdot(r^2\cdot\pi+2r\cdot\pi\cdot m)=3\cdot 2\cdot(0{,}75^2\cdot\pi+1{,}5\pi\cdot 1{,}5)\approx 53{,}01\ \text{m}^2,$$

ennek lefestéséhez 2,39 kg festék szükséges.



4338 A cső külső átmérője $5{,}4 + 0{,}6 = 6$ cm, tehát az elkészítéséhez szükséges fém térfogata:

$$V = \pi \cdot \left(r_1^2 - r_2^2\right) \cdot m_{test} = \pi \cdot \left(3^2 - 2{,}7^2\right) \cdot 200 \approx 1074{,}42 \text{ cm}^3.$$

A cső tömege:

$$m = V \cdot \rho = 1074{,}42 \cdot 7{,}2 \approx 7736 \text{ g} \approx 7{,}74 \text{ kg}.$$

4339 A henger magassága:

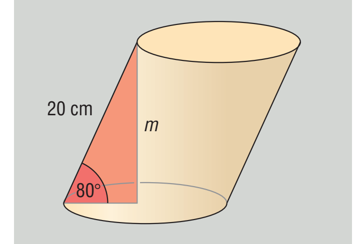
$$m = 20 \cdot \sin 80^\circ,$$

az alapkörének sugara:

$$r = 10 \cdot \sin 80^\circ.$$

A henger térfogata:

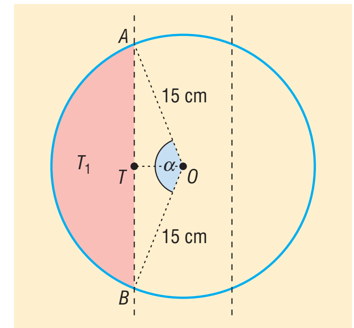
$$V = r^2 \cdot \pi \cdot m \approx 6001 \text{ cm}^3.$$



4340 A fahasáb alaplapját a párhuzamos síkok három részre osztják. A mellékelt ábrán látható színezett körszelet T_1 területének meghatározásához először ki kell számítanunk az $\alpha = AOB\sphericalangle$ középponti szöget.

Mivel az átmérőt az AB húr harmadolja, az AOB egyenlő szárú háromszög AB oldalához tartozó OT magassága 5 cm, így:

$$\cos\frac{\alpha}{2} = \frac{5}{15} \quad \Rightarrow \quad \alpha \approx 141{,}06^\circ.$$



A körszelet területe:

$$T_1 = 15^2 \cdot \pi \cdot \frac{141{,}06^\circ}{360^\circ} - \frac{15^2 \cdot \sin 141{,}06^\circ}{2} \approx 206{,}26 \text{ cm}^2.$$

Az egyik levágott rész térfogata:

$$V_1 = T_1 \cdot m_{test} \approx 9281{,}7 \text{ cm}^3,$$

tömege:

$$m_1 = V_1 \cdot \rho = 9281{,}7 \cdot 0{,}71 \approx 6590 \text{ g} = 6{,}59 \text{ kg}.$$

A másik levágott rész ezzel egybevágó, tehát ugyanekkora a tömege.

Az egész hasáb térfogata:

$$V = 15^2 \cdot \pi \cdot 45 \approx 31\,808 \text{ cm}^3,$$

tömege:

$$m = V \cdot \rho = 31\,808 \cdot 0{,}71 \approx 22\,580 \text{ g} = 22{,}58 \text{ kg}.$$

A harmadik rész tömegét megkapjuk úgy, hogy az egész fahasáb tömegéből kivonjuk az m_1 tömeg kétszeresét:

$$m_2 = m - 2 \cdot m_1 \approx 9{,}40 \text{ kg}.$$

A keletkezett részek tömege: 6,59 kg, 6,59 kg és 9,40 kg.

4341 A téglatest élei legyenek a, b és c hosszúságúak. A feladat feltétele szerint:

$$a + b + c = 18, \quad \text{valamint} \quad e = \sqrt{a^2 + b^2 + c^2} = \sqrt{110}.$$

Mivel

$$(a + b + c)^2 = a^2 + b^2 + c^2 + 2 \cdot (ab + ac + bc),$$

az előzőeket felhasználva:

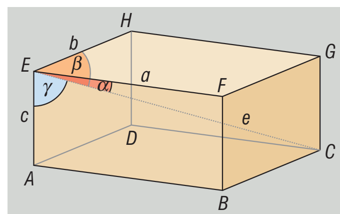
$$18^2 = 110 + 2 \cdot (ab + ac + bc).$$

A téglatest felszíne:

$$A = 2 \cdot (ab + ac + bc) = 214 \text{ cm}^2.$$



4342 A téglatest éleinek hossza legyen a, b és c. Az e hosszúságú testátlónak az élekkel bezárt szöge legyen α, β és γ.



A szögek koszinuszai:

$$\cos\alpha = \frac{a}{e}, \qquad \cos\beta = \frac{b}{e}, \qquad \cos\gamma = \frac{c}{e}.$$

Mivel $e = \sqrt{a^2 + b^2 + c^2}$, a koszinuszok négyzetösszege:

$$\cos^2\alpha + \cos^2\beta + \cos^2\gamma = \frac{a^2}{e^2} + \frac{b^2}{e^2} + \frac{c^2}{e^2} = 1.$$

a) Az előzőek alapján:

$$\cos^2 23° + \cos^2 72° + \cos^2\gamma = 1 \quad \Rightarrow \quad \gamma \approx 76{,}17°.$$

A testátlónak a harmadik éllel bezárt szöge $76{,}17°$.

b) A téglatest éleinek hossza:

$$a = 80 \cdot \cos 23°, \quad b = 80 \cdot \cos 72° \quad \text{és} \quad c = 80 \cdot \cos 76{,}17°.$$

A téglatest térfogata:

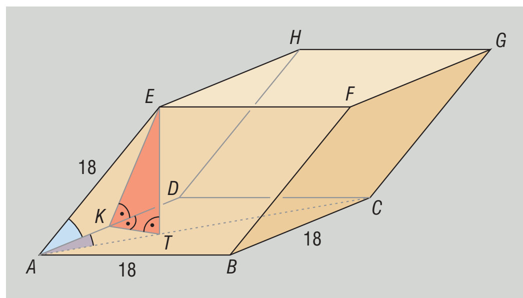
$$V = 80^3 \cdot \cos 23° \cdot \cos 72° \cdot \cos 76{,}17° \approx 34\,813{,}88 \text{ cm}^3.$$

4343 *a)* A romboédert hat egybevágó rombusz határolja. Egy rombusz területe:

$$T_{\text{rombusz}} = 18^2 \cdot \sin 60° = 162\sqrt{3},$$

tehát a romboéder felszíne:

$$A = 6 \cdot T_{\text{rombusz}} = 6 \cdot 162\sqrt{3} = 972\sqrt{3} = \\ = 1683{,}55 \text{ cm}^2.$$



b) Az ábrán látható $ABCDEFGH$ romboéder tengelyesen szimmetrikus az $ACGE$ testátló síkjára, ezért az E csúcsból az $ABCD$ alaplapra bocsátott merőleges T talppontja rajta van az AC lapátlón. Az E csúcsból az AD oldalélre bocsátott merőleges talppontja legyen K. A három merőleges egyenes tétele alapján KT egyenese is merőleges az AD oldal egyenesére.

Az AKE derékszögű háromszögben:

$$AK = 18 \cdot \cos 60°,$$
$$EK = 18 \cdot \sin 60° = 9\sqrt{3}.$$

Mivel $ABCD$ rombusz, és T pont rajta van az AC lapátlón, ezért a $KAT\sphericalangle = 30°$. Az ATK derékszögű háromszögben:

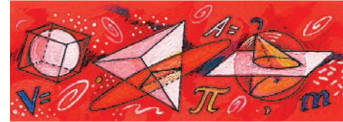
$$KT = AK \cdot \text{tg}\,30° = 18 \cdot \cos 60° \cdot \text{tg}\,30° = 3\sqrt{3}.$$

A romboéder ET magasságának hosszát a KTE derékszögű háromszögből Pitagorasz tételével számolhatjuk:

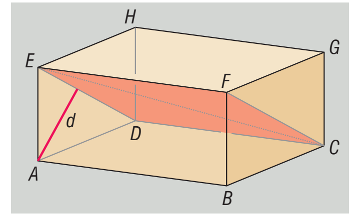
$$m = ET = \sqrt{EK^2 - KT^2} = \sqrt{\left(9\sqrt{3}\right)^2 - \left(3\sqrt{3}\right)^2} = \sqrt{216} = 6\sqrt{6}.$$

A romboéder térfogata:

$$V = T_{\text{rombusz}} \cdot m = 162\sqrt{3} \cdot 6\sqrt{6} = 2916\sqrt{2} \approx 4123{,}85 \text{ cm}^3.$$



4344 A téglatest EC testátlóját tartalmazza az AB éllel párhuzamos $EFCD$ sík. Az EC és AB kitérő egyenesek távolságának meghatározásához elég kiszámítani az $EFCD$ sík és az AB egyenesének d távolságát.



Az $ADHE$ sík merőleges az $EFCD$ síkra, így a d távolság a téglatest A csúcsának ED lapátlótól mért távolsága.

Legyen $AE = 3x$, $AD = 4x$ és $AB = 5x$ hosszúságú. Az ED lapátló a Pitagorasz-tétel alapján $5x$ hosszúságú. Az ADE derékszögű háromszög területét kétféleképpen számolva:

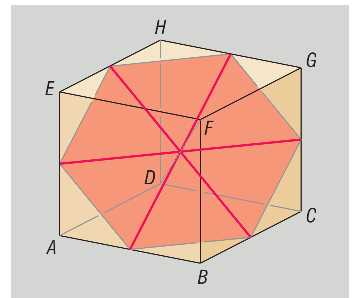
$$\frac{3x \cdot 4x}{2} = \frac{5x \cdot d}{2} \quad \Rightarrow \quad d = \frac{12}{5}x.$$

A feladat feltétele szerint $d = 2{,}4$ m, így $x = 1$.

A téglatest élei 3 m, 4 m és 5 m hosszúak, így a téglatest térfogata:

$$V = abc = 60 \text{ m}^3.$$

4345 Az ábrán látható kocka éle legyen a hosszúságú. Pitagorasz tétele alapján az F és D csúcsoktól a feladatban szereplő élek felezőpontjának mindegyike $\frac{a\sqrt{5}}{2}$ távolságra van, tehát az FD szakasz felezőmerőleges síkja mind a hat pontot tartalmazza. A felezőpontok síkbeli hatszöget határoznak meg.

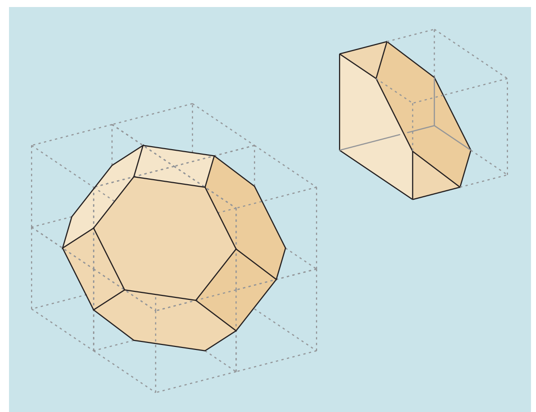


A hat felezőpontot rendre összekötő szakaszok mindegyikének hossza feleakkora, mint a kocka egy lapátlója, tehát a hatszög mindegyik oldala egyenlő hosszú.

Ezen hatszög köré kör írható, mivel a kocka éleinek felezőpontjai a kocka középpontjától feleolyan távol vannak, mint a kocka egy lapátlójának hossza.

Az a síkbeli hatszög, amely köré kör írható és oldalai egyenlő hosszúak, szabályos hatszög. Ezzel az állításunkat bebizonyítottuk.

4346 Képzeletben vágjuk a nagy a élű kockát 8 egybevágó kis kockára. A 4345. feladat alapján tudjuk, hogy az új test lapjai minden ilyen kis kockát szabályos hatszögben metszenek.



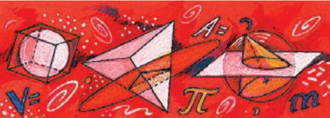
a) A kis kockát metsző sík a kis kockát két egybevágó testre vágja szét, mivel a létrejött egyik test a másiknak a kis kocka középpontjára vonatkozó tükörképe. Ebből következik, hogy a két rész térfogata is egyenlő.

Minden kis kocka térfogatának fele tartozik az új testhez, tehát a test térfogata:

$$V = \frac{a^3}{2} = \frac{12^3}{2} = 864 \text{ cm}^3.$$

b) Az új testet határoló négyzetek átlói feleolyan hosszúak, mint a nagy kocka éle, tehát területe:

$$T_{\text{négyzet}} = \frac{\left(\frac{a}{2}\right)^2}{2} = \frac{a^2}{8} = 18 \text{ cm}^2.$$



Az új testet határoló nyolc szabályos hatszög oldaléle a nagy kocka lapátlójának negyede, tehát területe:

$$T_{\text{hatszög}} = 6 \cdot \frac{\left(\frac{a\sqrt{2}}{4}\right)^2 \cdot \sqrt{3}}{4} = \frac{3\sqrt{3} \cdot a^2}{16}.$$

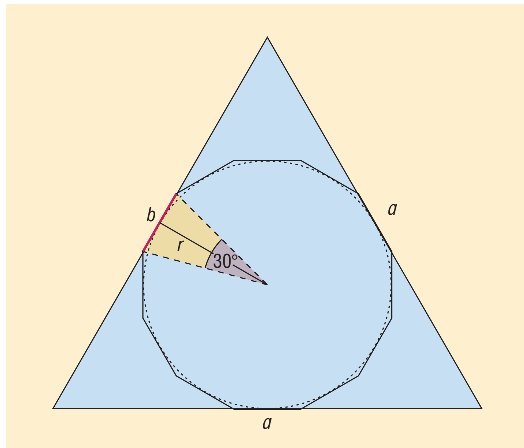
A test felszíne:

$$A = 6 \cdot T_{\text{négyzet}} + 8 \cdot T_{\text{hatszög}} = 6 \cdot 18 + 8 \cdot 27\sqrt{3} =$$
$$= 108 + 216\sqrt{3} \approx 482{,}12 \text{ cm}^2.$$

4347 Legyen a hasáb alaplapja a oldalú szabályos háromszög.

Ha a háromszögből szabályos tizenkétszöget akarunk készíteni, beírható körének sugara legfeljebb akkora lehet, mint a szabályos háromszögbe írható kör sugara.

Mivel a szabályos háromszög 120°-ra nézve, a szabályos tizenkétszög pedig 30°-ra nézve forgásszimmetrikus, ezért a háromszögből ki lehet vágni egy olyan szabályos tizenkétszöget, amelynek beírható köre egyben a háromszög beírható köre is.



Ennek a körnek a sugara a szabályos háromszög magasságának harmada:

$$r = \frac{1}{3} \cdot \frac{a\sqrt{3}}{2} = \frac{a\sqrt{3}}{6}.$$

a) A szabályos tizenkétszög b oldaléle egy olyan egyenlő szárú háromszög alapja, amelynek szárszöge 30°, az alaphoz tartozó magassága pedig r.

Ebből következően:

$$b = 2r \cdot \text{tg}\,15° = \frac{a\sqrt{3}}{3} \cdot \text{tg}\,15° \approx 0{,}15 \text{ m}.$$

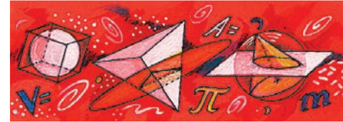
A hasáb alapéle 0,15 m.

b) Az elszállítandó hulladék térfogata a háromszög alapú és tizenkétszög alapú hasáb térfogatának a különbsége:

$$V = T_{\text{háromszög}} \cdot m - T_{\text{tizenkétszög}} \cdot m = m \cdot \left(\frac{a^2 \cdot \sqrt{3}}{4} - 12 \cdot \frac{b \cdot r}{2}\right) =$$
$$= m \cdot \left(\frac{a^2 \cdot \sqrt{3}}{4} - 12 \cdot \frac{\frac{a\sqrt{3}}{3} \cdot \text{tg}\,15° \cdot \frac{a\sqrt{3}}{6}}{2}\right) =$$
$$= \frac{1{,}5 \cdot 1^2}{4} \cdot \left(\sqrt{3} - 4 \cdot \text{tg}\,15°\right) \approx 0{,}2476 \text{ m}^3 = 247{,}6 \text{ dm}^3.$$

A hulladék tömege:

$$m_{\text{hulladék}} = V \cdot \rho = 247{,}6 \cdot 2{,}85 \approx 705{,}66 \text{ kg}.$$



4348 A téglatest élei legyenek a, b és c hosszúságúak.
Írjuk fel a számtani és mértani közép közti összefüggést az ab, ac és bc pozitív kifejezésekre:

$$\frac{ab+ac+bc}{3} \ge \sqrt[3]{ab \cdot ac \cdot bc},$$
$$2 \cdot (ab+ac+bc) \ge 6 \cdot \sqrt[3]{a^2 \cdot b^2 \cdot c^2},$$
$$A \ge 6 \cdot \sqrt[3]{V^2}.$$

Egy téglatest felszíne mindig nagyobb vagy egyenlő, mint a térfogata négyzetéből vont köbgyök hatszorosa.
Mivel ekvivalens átalakításokat végeztünk, egyenlőség akkor és csak akkor áll fenn, ha az ab, ac és bc kifejezések számtani és mértani középe egyenlő.
Ismert, hogy ez csak akkor teljesül, ha:

$$ab = ac = bc \quad \Leftrightarrow \quad a = b = c.$$

A $125\ \text{cm}^3$ térfogatú téglatestek közül az 5 cm élű kocka felszíne a legkisebb.

4349 A henger alapkörének sugara legyen r, magassága m.
A henger felszíne:

$$A = 2r \cdot \pi \cdot (r+m),$$
$$m = \frac{A}{2r \cdot \pi} - r.$$

A henger térfogata:

$$V = r^2 \cdot \pi \cdot m.$$

A térfogat kifejezésébe helyettesítsük be m-et, így a térfogatot r függvényeként írjuk fel:

$$V(r) = r^2 \cdot \pi \cdot \left(\frac{A}{2r \cdot \pi} - r\right) = r \cdot \frac{A}{2} - r^3 \cdot \pi, \qquad r \in \mathbb{R}^+.$$

Ennek a függvénynek ott lehet maximuma, ahol az első deriváltja 0:

$$V'(r) = \frac{A}{2} - 3r^2 \cdot \pi.$$

Pozitív r-eket tekintve, ennek a függvénynek $r = \sqrt{\frac{A}{6\pi}}$ helyen van zérushelye.

Az első derivált előjele, ha $0 < r < \sqrt{\frac{A}{6\pi}}$, akkor pozitív, ha $\sqrt{\frac{A}{6\pi}} < r$, akkor negatív, tehát $r = \sqrt{\frac{A}{6\pi}}$ esetén $V(r)$ függvénynek maximuma van.

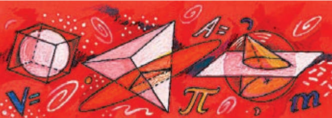
Az egyenlő felszínű egyenes körhengerek közül annak a térfogata maximális, amely alapkörének sugara:

$$r = \sqrt{\frac{A}{6\pi}},$$

magassága:

$$m = \frac{A}{2r \cdot \pi} - r = \frac{A}{2 \cdot \sqrt{\frac{A}{6\pi}} \cdot \pi} - \sqrt{\frac{A}{6\pi}} = 2 \cdot \sqrt{\frac{A}{6\pi}}.$$

A henger térfogata tehát akkor a legnagyobb, ha alapkörének átmérője és magassága egyenlő hosszú.



A gúla és a kúp térfogata

4350 A táblázat hiányzó adatai:

Alaplap	Alapél	Oldalél	Testmagasság	Felszín	Térfogat
négyzet	10 cm	$\sqrt{534}$ cm	22 cm	$100+20\sqrt{509}\approx 551{,}22$ cm^2	$\frac{2200}{3}\approx 733{,}33$ cm^3
négyzet	2 dm	26 cm	$2\sqrt{119}$ cm	1360 cm^2	$\frac{800\sqrt{119}}{3}\approx 2908{,}99$ cm^3
négyzet	$10\sqrt{10}\approx 31{,}62$ cm	30 cm	20 cm	$1000+200\sqrt{65}\approx 2612{,}45$ cm^2	$\frac{20000}{3}\approx 6666{,}67$ cm^3
négyzet	20 cm	$2\sqrt{491}\approx 44{,}32$ cm	42 cm	$400+80\sqrt{466}\approx 2126{,}96$ cm^2	5600 cm^3
szabályos háromszög	12 dm	$8\sqrt{7}\approx 21{,}17$ cm	20 cm	$36\sqrt{3}+36\sqrt{103}\approx 427{,}71$ cm^2	$240\sqrt{3}\approx 415{,}69$ cm^3
szabályos háromszög	18 cm	15 cm	$3\sqrt{13}\approx 10{,}82$ cm	$324+81\sqrt{3}\approx 464{,}30$ cm^2	$81\sqrt{39}\approx 505{,}84$ cm^3
szabályos hatszög	12 cm	$4\sqrt{34}\approx 23{,}32$ cm	20 cm	$216\sqrt{3}+72\sqrt{127}\approx 1185{,}52$ cm^2	$1440\sqrt{3}\approx 2494{,}15$ cm^3
szabályos hatszög	24 cm	30 cm	18 cm	$864\sqrt{3}+432\sqrt{21}\approx 3476{,}16$ cm^2	$5184\sqrt{3}\approx 8978{,}95$ cm^3

4351 *a)* A Kheopsz-piramis térfogata:

$$V=\frac{T\cdot m}{3}\approx 2\,655\,317\ \text{m}^3\approx 2{,}66\ \text{km}^3.$$

b) A Kheopsz-piramis alaplapjának és az oldallapjának a hajlásszöge megközelítőleg 52°.

4352 *a)* A gúla felszíne:

$$A=T_{alap}+A_{palást}=100\cdot\left(\sqrt{2}+1\right)\approx 241{,}42\ \text{cm}^2.$$

b) A gúla térfogata:

$$V=\frac{T\cdot m}{3}=\frac{500}{3}\approx 166{,}67\ \text{cm}^3.$$

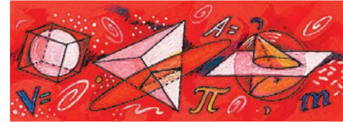
4353 *a)* A gúla alapéle: 18 cm.

b) A gúla felszíne:

$$A=T_{alap}+A_{palást}=324+108\sqrt{13}\approx 713{,}40\ \text{cm}^2.$$

4354 A táblázat hiányzó adatai:

Alapkör sugara	Kúp magassága	Alkotó hossza	Felszín	Térfogat
6 cm	10 cm	$2\sqrt{34}\approx 11{,}66$ cm	$12\pi\cdot(3+\sqrt{34})\approx 332{,}92$ cm^2	$120\pi\approx 377{,}00$ cm^3
$10\sqrt{5}\approx 22{,}36$ cm	20 cm	30 cm	$100\pi\cdot(5+3\sqrt{5})\approx 3678{,}24$ cm^2	$\frac{10000}{3}\pi\approx 10471{,}98$ cm^3
7 cm	$5\sqrt{11}\approx 16{,}58$ cm	18 cm	$175\pi\approx 549{,}78$ cm^2	$\frac{245\pi\cdot\sqrt{11}}{3}\approx 850{,}92$ cm^3
10 cm	2 dm	$10\sqrt{5}\approx 22{,}36$ cm	$100\pi\cdot(1+\sqrt{5})\approx 1016{,}64$ cm^2	$\frac{2000}{3}\pi\approx 2094{,}40$ cm^3
8 cm	6 cm	10 cm	$144\pi\approx 452{,}39$ cm^2	$128\pi\approx 402{,}12$ cm^3



4355 *a)* Az egyenes körkúp felszíne: $A \approx 163,30\ \text{cm}^2$.
b) Az egyenes körkúp térfogata: $V \approx 138,73\ \text{cm}^3$.

4356 A koktélospohárba megközelítőleg 6 dl ital tölthető.

4357 *a)* A forgástest felszíne: $A = 300\pi \approx 942,48\ \text{cm}^2$, térfogata: $V = 240\pi \approx 753,98\ \text{cm}^3$.
b) A forgástest felszíne: $A = 90\pi \approx 282,74\ \text{cm}^2$, térfogata: $V = 100\pi \approx 314,16\ \text{cm}^3$.

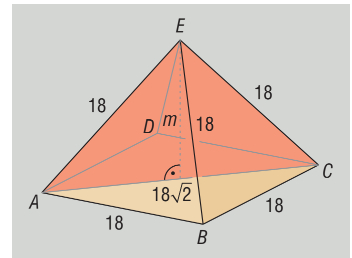
4358 *a)* A forgáskúp alapkörének sugara: $r = \dfrac{10}{3} \approx 3,33\ \text{cm}$.
b) A forgáskúp nyílásszöge: $\varphi \approx 49,25°$.
c) A forgáskúp térfogata: $V = \dfrac{200\sqrt{119}}{81}\pi \approx 84,62\ \text{cm}^3$.
d) A forgáskúp felszíne: $A = \dfrac{340}{9}\pi \approx 118,68\ \text{cm}^2$.

4359 A forgáskúp térfogata: $V = \dfrac{125\sqrt{15}}{3\sqrt{\pi}} \approx 91,05\ \text{cm}^3$.

4360 A forgáskúp kiterített palástjának középponti szöge $216°$.

4361 *a)* Az egyenes körkúp felszíne: $A \approx 802,46\ \text{cm}^2$.
b) Az egyenes körkúp térfogata: $V \approx 1487,44\ \text{cm}^3$.

4362 Tekintsük a mellékelt ábrát. A Pitagorasz-tétel megfordítása alapján az $ACE_\triangle$ egy olyan egyenlő szárú derékszögű háromszög, amelynek befogói 18 cm hosszúak. A gúla testmagassága az alaplap AC átlójának a fele:



$$m = \frac{a\sqrt{2}}{2} = \frac{18\sqrt{2}}{2} = 9\sqrt{2}.$$

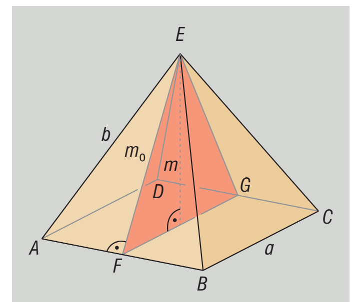
a) A gúla felszíne az alaplap és négy 18 cm oldalú szabályos háromszög területének az összege:

$$A = T + A_{\text{palást}} = 18^2 + 4 \cdot \frac{18^2 \cdot \sqrt{3}}{4} = 18^2 \cdot \left(1 + \sqrt{3}\right) \approx 885,18\ \text{cm}^2.$$

b) A gúla térfogata:

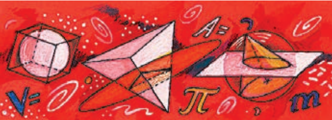
$$V = \frac{T \cdot m}{3} = \frac{18^2 \cdot 9 \cdot \sqrt{2}}{3} = 972\sqrt{2} \approx 1374,62\ \text{cm}^3.$$

4363 Tekintsük a mellékelt ábrát. Legyen a gúla alapéle a hosszúságú. Az $EFG_\triangle$ a feladat szövege szerint szabályos háromszög, így a gúla testmagassága a szabályos háromszög magassága: $m = \dfrac{a\sqrt{3}}{2}$, illetve az oldallapok magassága a szabályos háromszög a oldala: $m_o = a$.



A gúla térfogatából adódóan:

$$V = \frac{T \cdot m}{3} \quad \Rightarrow \quad 147,8 = \frac{a^2 \cdot \frac{a\sqrt{3}}{2}}{3} \quad \Rightarrow \quad a \approx 8.$$



a) A gúla magassága:

$$m = \frac{a\sqrt{3}}{2} = 4\sqrt{3} \approx 6{,}93 \text{ cm}.$$

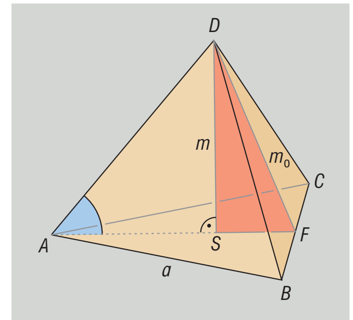
b) A gúla b oldaléle az AFE derékszögű háromszögből számítható:

$$b = \sqrt{AF^2 + EF^2} = \sqrt{\left(\frac{a}{2}\right)^2 + a^2} = \sqrt{4^2 + 8^2} = \sqrt{80} = 4\sqrt{5} \approx 8{,}94 \text{ cm}.$$

c) A gúla felszíne:

$$A = T + A_{\text{palást}} = a^2 + 4 \cdot \frac{a \cdot m_o}{2} = 8^2 + 4 \cdot \frac{8^2}{2} = 192 \text{ cm}^2.$$

4364 Ha a gúla alaplapjának területe T, akkor egy oldallap területe $\frac{3}{4}T$. Így a gúla felszíne:



$$A = T + 3 \cdot \frac{3}{4}T \quad \Rightarrow \quad 202{,}65 = \frac{13}{4}T \quad \Rightarrow \quad T \approx 62{,}35 \text{ cm}^2.$$

A gúla alaplapja a oldalú szabályos háromszög, ezért:

$$T = \frac{a^2 \cdot \sqrt{3}}{4} \quad \Rightarrow \quad 62{,}35 = \frac{a^2 \cdot \sqrt{3}}{4} \quad \Rightarrow \quad a \approx 12 \text{ cm}.$$

A gúla m testmagasságának meghatározásához számítsuk ki az oldallap m_o magasságát az oldallap területéből:

$$T_{\text{oldallap}} = \frac{3}{4}T, \quad \text{azaz} \quad \frac{a \cdot m_o}{2} = \frac{3}{4}T \quad \Rightarrow \quad m_o \approx 7{,}79.$$

Az ábra jelöléseit használva a gúla testmagasságának S talppontja az ABC szabályos háromszög súlypontja.

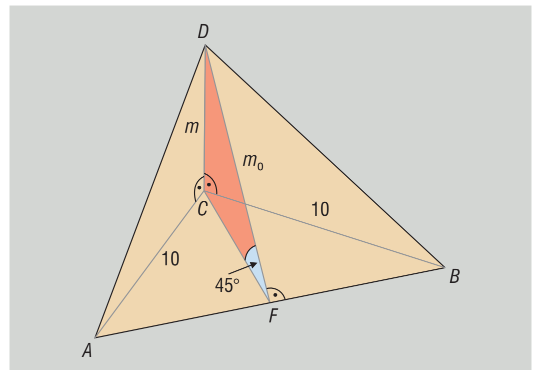
A súlypont a háromszög AF súlyvonalának a csúcstól távolabbi harmadolópontja. Az SFD derékszögű háromszögben a Pitagorasz-tétel alapján a gúla m testmagassága számítható:

$$m = \sqrt{DF^2 - SF^2} = \sqrt{7{,}79^2 - \left(\frac{12\sqrt{3}}{2} \cdot \frac{1}{3}\right)^2} \approx 6{,}98 \text{ cm}.$$

Így a gúla térfogata:

$$V = \frac{T \cdot m}{3} = \frac{62{,}35 \cdot 6{,}98}{3} = 145{,}07 \text{ cm}^3.$$

4365 Az ABC alaplap egyenlő szárú derékszögű háromszög, átfogója: $AB = 10\sqrt{2}$, az átfogóhoz tartozó magassága pedig az átfogó fele: $CF = 5\sqrt{2}$.



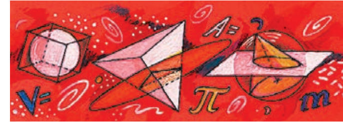
Mivel az ABC alaplap és az ABD oldallap bezárt szöge 45°, az FCD háromszög is egyenlő szárú derékszögű háromszög.

A gúla testmagassága:

$$m = CF = 5\sqrt{2}.$$

Az ABD oldallap magassága:

$$m_o = DF = CF \cdot \sqrt{2} = 10.$$



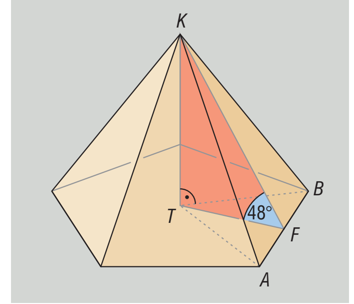
A gúla térfogata:

$$V=\frac{T\cdot m}{3}=\frac{\frac{10^2}{2}\cdot 5\sqrt{2}}{3}\approx 117{,}85\ \text{cm}^3.$$

A gúla felszíne:

$$A=T_{ABC}+2\cdot T_{ACD}+T_{ABD}=50+2\cdot\frac{10\cdot 5\sqrt{2}}{2}+\frac{10\sqrt{2}\cdot 10}{2}=$$
$$=50\cdot\left(1+2\sqrt{2}\right)\approx 191{,}42\ \text{cm}^2.$$

4366 A befedendő felület egy olyan szabályos ötoldalú gúla palástjának a területe, amelynek az alapéle 2 m.



Használjuk az ábra jelöléseit. A gúla magasságának talppontja a szabályos ötszög körülírható körének T középpontja. Az ABT egyenlő szárú háromszög alapja $AB=2$, a T-nél lévő szárszöge $\frac{360°}{5}=72°$. A háromszög TF magassága: $TF=\frac{1}{\text{tg}\,36°}$.

A TFK derékszögű háromszögben ismert TF befogó, illetve az F csúcsnál lévő szög:

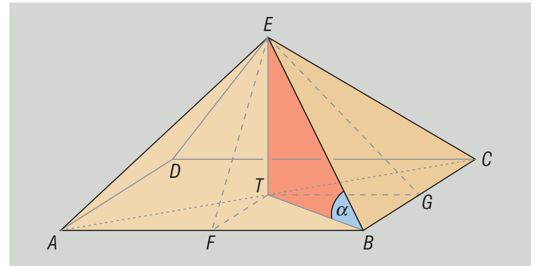
$$KF=\frac{TF}{\cos 48°}=\frac{1}{\text{tg}\,36°\cdot\cos 48°}.$$

A palást területe:

$$T_{\text{palást}}=5\cdot T_{ABK}=5\cdot\frac{2\cdot\frac{1}{\text{tg}\,36°\cdot\cos 48°}}{2}=\frac{5}{\text{tg}\,36°\cdot\cos 48°}\approx 10{,}28\ \text{m}^2.$$

A tető befedéséhez (a veszteséget is figyelembe véve) $\frac{10{,}28\cdot 10}{0{,}9}\approx 115$ cserepet kell vásárolnunk.

4367 Tekintsük az ábra jelöléseit. Legyen $AB=20$ cm és $BC=12$ cm, felezőpontjaik rendre F és G, valamint a testmagasság talppontja T.



A gúla magassága a térfogatból számítható:

$$m=\frac{3\cdot V}{T}=\frac{3\cdot 1200}{12\cdot 20}=15\ \text{cm}.$$

Mivel a gúla csúcsából az alaplapra bocsátott merőleges talppontja a téglalap átlóinak metszéspontja, a gúla minden oldaléle egyenlő hosszú, vagyis az oldallap háromszögek egyenlő szárúak.

a) A felszín kiszámításához meg kell határoznunk az ABE illetve a BCE oldallapok magasságait.

Az EFT derékszögű háromszögből:

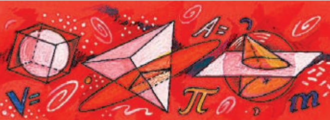
$$EF=\sqrt{ET^2+FT^2}=\sqrt{15^2+6^2}=3\sqrt{29}.$$

Az EGT derékszögű háromszögből:

$$EG=\sqrt{ET^2+GT^2}=\sqrt{15^2+10^2}=5\sqrt{13}.$$

A gúla felszíne:

$$A=T_{ABCD}+2\cdot T_{ABE}+2\cdot T_{BCE}=240+2\cdot\frac{20\cdot 3\sqrt{29}}{2}+2\cdot\frac{12\cdot 5\sqrt{13}}{2}\approx 779{,}44\ \text{cm}^2.$$



b) Az oldalélnek az alaplappal bezárt α szögét a TBE derékszögű háromszögből számítjuk. A TB szakasz az $ABCD$ téglalap átlójának a fele:

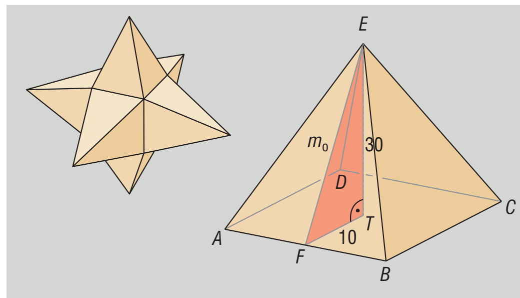
$$TB = \frac{1}{2} \cdot \sqrt{20^2 + 12^2} = 2\sqrt{34}.$$

Az α szög meghatározása:

$$\operatorname{tg}\alpha = \frac{m}{TB} = \frac{15}{2\sqrt{34}} \quad \Rightarrow \quad \alpha \approx 52{,}14°.$$

A gúla oldaléleinek az alaplappal bezárt szöge $52{,}14°$.

4368 *a)* A feladatban leírt „csillagtest” felszíne hat 20 cm alapélű, 30 cm magas szabályos négyoldalú gúla palástjának felszíne.



Az ábra alapján a fent leírt gúla egy egyenlő szárú oldallapjának alapja 20 cm. A gúla magassága Pitagorasz-tétellel az FTE derékszögű háromszögből számítható:

$$m_o = \sqrt{(ET)^2 + (FT)^2} = 10\sqrt{10}.$$

A gúla egy oldallapjának területe:

$$T_{\text{háromszög}} = \frac{20 \cdot 10\sqrt{10}}{2} = 100\sqrt{10}.$$

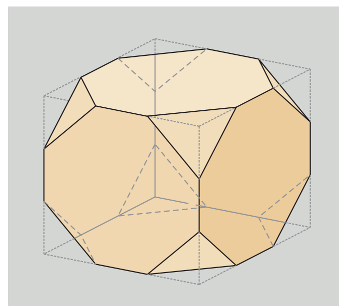
A „csillagtest” felszíne:

$$A = 24 \cdot T_{\text{háromszög}} = 24 \cdot 100\sqrt{10} \approx 7589{,}47\ \text{cm}^2.$$

b) A „csillagtest” térfogata:

$$V = V_{\text{kocka}} + 6 \cdot V_{\text{gúla}} = 20^3 + 6 \cdot \frac{20^2 \cdot 30}{3} = 32\,000\ \text{cm}^3.$$

4369 Legyen a kocka éle a, $a = 30$ cm.



a) A keletkezett test felszíne 6 nyolcszögből és 8 háromszögből áll.

A nyolcszög területét megkapjuk úgy, hogy az a oldalú négyzet területéből kivonjuk négy $\frac{a}{3}$ befogójú egyenlő szárú derékszögű háromszög területét:

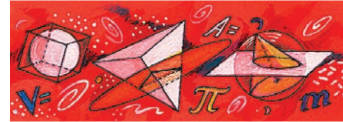
$$T_{\text{nyolcszög}} = a^2 - 4 \cdot \frac{\left(\frac{a}{3}\right)^2}{2} = \frac{7a^2}{9} = \frac{7 \cdot 900}{9} = 700\ \text{cm}^2.$$

A határoló háromszögek mindegyike $\frac{a\sqrt{2}}{3}$ oldalú szabályos háromszög:

$$T_{\text{háromszög}} = \frac{\left(\frac{a\sqrt{2}}{3}\right)^2 \cdot \sqrt{3}}{4} = \frac{a^2 \cdot \sqrt{3}}{18} = \frac{900\sqrt{3}}{18} = 50\sqrt{3}\ \text{cm}^2.$$

A test felszíne:

$$A = 6 \cdot T_{\text{nyolcszög}} + 8 \cdot T_{\text{háromszög}} = 6 \cdot 700 + 8 \cdot 50\sqrt{3} \approx 4892{,}82\ \text{cm}^2.$$



b) A test térfogatának meghatározásához az a élű kocka térfogatából ki kell vonni a csúcsoknál lévő nyolc tetraéder térfogatát.

A tetraéderek térfogatának meghatározásához tekintsük alapnak az $\frac{a}{3}$ befogójú egyenlő szárú derékszögű háromszöget. A tetraéder magassága $\frac{a}{3}$, térfogata:

$$V_{\text{tetraéder}} = \frac{T \cdot m}{3} = \frac{\frac{\left(\frac{a}{3}\right)^2}{2} \cdot \frac{a}{3}}{3} = \frac{a^3}{162} \quad \left(\approx 166{,}67\ \text{cm}^3\right).$$

A test térfogata:

$$V = V_{\text{kocka}} - 8 \cdot V_{\text{tetraéder}} = a^3 - 8 \cdot \frac{a^3}{162} = \frac{77a^3}{81} \approx 25\,666{,}67\ \text{cm}^3.$$

4370 A gúla alaplapjával párhuzamos sík a gúlából az alaplaphoz hasonló síkidomot metsz ki. A hasonlóság aránya $\frac{15-8}{15} = \frac{7}{15}$.

Mivel hasonló síkidomok területének aránya a hasonlóság arányának négyzetével egyenlő, az alaplap T területére fennáll:

$$\frac{100}{T} = \left(\frac{7}{15}\right)^2 \quad \Rightarrow \quad T = \frac{22\,500}{49}.$$

A gúla térfogata:

$$V = \frac{T \cdot m}{3} = \frac{\frac{22\,500}{49} \cdot 15}{3} = \frac{112\,500}{49} \approx 2295{,}92\ \text{cm}^3.$$

4371 A kúp alakú tölcsér alkotója 30 cm, az alapkörének r sugarára fennáll:

$$2 \cdot r \cdot \pi = 2 \cdot 30 \cdot \pi \cdot \frac{120^\circ}{360^\circ}, \quad \text{innen} \quad r = \frac{30}{3} = 10\ \text{cm}.$$

a) A kúp magassága:

$$m = \sqrt{30^2 - 10^2} = 20\sqrt{2} \approx 28{,}28\ \text{cm}.$$

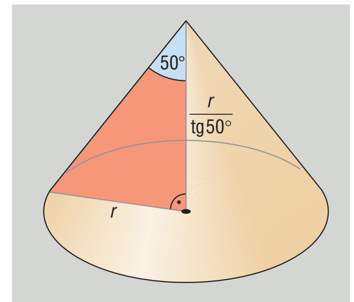
b) A kúp térfogata:

$$V = \frac{r^2 \cdot \pi \cdot m}{3} = \frac{(10)^2 \cdot \pi \cdot 20\sqrt{2}}{3} = \frac{2000\sqrt{2}}{3}\pi \approx 2961{,}92\ \text{cm}^3.$$

A tölcsérbe megközelítőleg $2{,}96$ liter pattogatott kukorica fér.

4372 Ha a sóderkúp alapkörének sugara r, akkor a magasságát a fél nyílásszög segítségével felírhatjuk r függvényében:

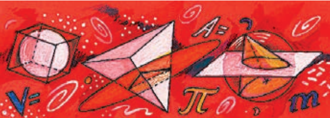
$$m = \frac{r}{\operatorname{tg} 50^\circ}.$$



A kúp térfogatára felírhatjuk:

$$V = \frac{r^2 \cdot \pi \cdot m}{3} \quad \Rightarrow \quad 2 = \frac{r^3 \cdot \pi}{3 \cdot \operatorname{tg} 50^\circ} \quad \Rightarrow \quad r = \sqrt[3]{\frac{6 \cdot \operatorname{tg} 50^\circ}{\pi}} \approx 1{,}32.$$

Ebből az alapkör átmérője: $d \approx 2{,}64$ m.

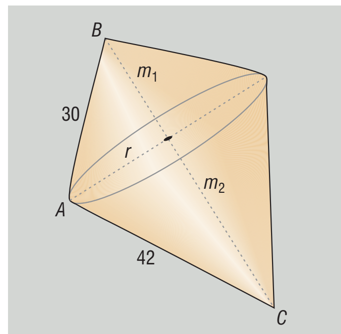


a) Mivel az alapkör átmérője több mint 2 méter, a sóder nem fér el a kikészített fólián.

b) A sóderkúp magassága:

$$m = \frac{r}{\operatorname{tg} 50°} = \frac{\sqrt[3]{\frac{6 \cdot \operatorname{tg} 50°}{\pi}}}{\operatorname{tg} 50°} \approx 1{,}11 \text{ m}.$$

4373 Az ábra szerint az $ABC_\triangle$-ben legyen $AB = 30$ cm, $AC = 42$ cm, és a két oldal által bezárt szög $100°$.



Mivel a háromszög tompaszögű és a leghosszabb oldala körül forgatjuk meg, a keletkezett forgástest két kúpból áll. A kúpok alaplapja közös, valamint az alaplapok sugara a háromszög leghosszabb oldalához tartozó magassága.

A háromszög harmadik $a = m_1 + m_2$ oldalának hosszát koszinusztétellel számíthatjuk:

$$a^2 = 30^2 + 42^2 - 2 \cdot 30 \cdot 42 \cdot \cos 100° \quad \Rightarrow \quad a \approx 55{,}69.$$

A háromszög területét írjuk fel kétféleképpen:

$$\frac{a \cdot m_a}{2} = \frac{b \cdot c \cdot \sin\gamma}{2}.$$

Ebből kapjuk, hogy:

$$m_a = r = \frac{b \cdot c \cdot \sin\gamma}{a} = \frac{42 \cdot 30 \cdot \sin 100°}{55{,}69} \approx 22{,}28.$$

A kúp alaplapjának sugara 22,28 cm.

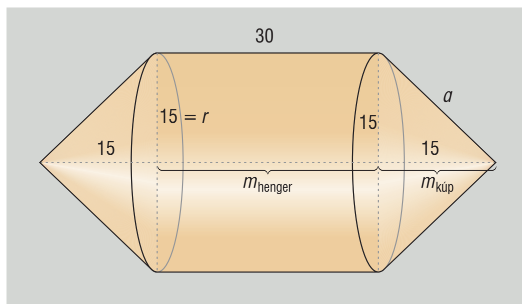
a) A forgástest felszíne a keletkezett két forgáskúp palástjából áll:

$$A = r \cdot \pi \cdot a_1 + r \cdot \pi \cdot a_2 = r \cdot \pi \cdot (a_1 + a_2) =$$
$$= 22{,}28\pi \cdot (30 + 42) \approx 5039{,}62 \text{ cm}^2.$$

b) A forgástest térfogata a keletkezett két forgáskúp térfogatának az összege. Vegyük figyelembe, hogy a magasságok összege a megforgatott háromszög a oldalának hossza:

$$V = \frac{r^2 \cdot \pi \cdot m_1}{3} + \frac{r^2 \cdot \pi \cdot m_2}{3} = \frac{r^2 \cdot \pi}{3} \cdot (m_1 + m_2) = \frac{r^2 \cdot \pi}{3} \cdot a \approx 28949{,}18 \text{ cm}^3.$$

4374 *a)* Ha a húrtrapézt a hosszabbik alapja körül forgatjuk meg, a forgástest egy hengerből és két egybevágó kúpból áll.



A kúp alkotójának hossza:

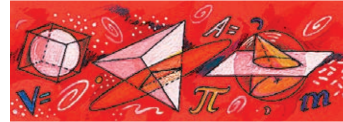
$$a = \sqrt{15^2 + 15^2} = 15\sqrt{2} \text{ cm}.$$

A forgástest térfogata:

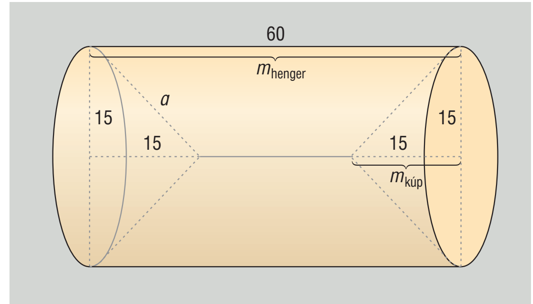
$$V = V_{henger} + 2 \cdot V_{kúp} =$$
$$= r^2 \cdot \pi \cdot m_{henger} + 2 \cdot \frac{r^2 \cdot \pi \cdot m_{kúp}}{3} =$$
$$= 15^2 \cdot \pi \cdot 40 \approx 28274{,}33 \text{ cm}^3.$$

A forgástest felszíne:

$$A = A_{hengerpalást} + 2 \cdot A_{kúppalást} = 2r \cdot \pi \cdot m_{henger} + 2r \cdot \pi \cdot a =$$
$$= 2r \cdot \pi \cdot (m_{henger} + a) = 2 \cdot 15 \cdot \pi \cdot \left(30 + 15\sqrt{2}\right) \approx 4826{,}73 \text{ cm}^2.$$



b) Ha a húrtrapézt a rövidebbik alapja körül forgatjuk meg, a forgástest egy olyan henger lesz, amelyből „kivágtuk” a két kúpot.



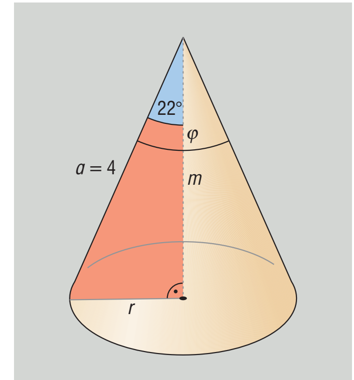
A forgástest térfogata:

$$V = V_{henger} - 2 \cdot V_{kúp} =$$
$$= r^2 \cdot \pi \cdot m_{henger} - 2 \cdot \frac{r^2 \cdot \pi \cdot m_{kúp}}{3} =$$
$$= 15^2 \cdot \pi \cdot 50 \approx 35342{,}92\ \text{cm}^3.$$

A forgástest felszíne:

$$A = A_{hengerpalást} + 2 \cdot A_{kúppalást} = 2r \cdot \pi \cdot m_{henger} + 2r \cdot \pi \cdot a =$$
$$= 2r \cdot \pi \cdot (m_{henger} + a) = 2 \cdot 15 \cdot \pi \cdot \left(60 + 15\sqrt{2}\right) \approx 7654{,}16\ \text{cm}^2.$$

4375 Ha a körkúp nyílásszöge φ, akkor a tengelymetszet területe:



$$T_{tengelymetszet} = \frac{a^2 \cdot \sin\varphi}{2},$$
$$5{,}56 = \frac{4^2 \cdot \sin\varphi}{2}, \quad \text{amiből} \quad \varphi \approx 44°.$$

Az alkotó, a testmagasság és a sugár alkotta derékszögű háromszögben:

$$r = 4 \cdot \sin 22° \approx 1{,}50 \quad \text{és} \quad m = 4 \cdot \cos 22° \approx 3{,}71.$$

A kúp térfogata:

$$V = \frac{r^2 \cdot \pi \cdot m}{3} \approx 8{,}74\ \text{dm}^3.$$

4376 A feladatban szereplő két kúp hasonló egymáshoz, mivel nyílásszögeik egyenlők. A hasonlóság aránya a sugaraik aránya: $\frac{12}{20} = \frac{3}{5}$. Térfogataik aránya a hasonlóság arányának a köbe.

A megmaradt rész térfogata a két kúp térfogatának a különbsége:

$$V = V_1 - V_2 = V_1 - \left(\frac{3}{5}\right)^3 \cdot V_1 = V_1 \cdot \left(1 - \frac{27}{125}\right) = \frac{20^2 \cdot \pi \cdot 40}{3} \cdot \frac{98}{125} = \frac{12544\pi}{3} \approx 13136{,}05\ \text{cm}^3.$$

4377 *a)* Tekintsük a kúp leghosszabb és legrövidebb alkotóját tartalmazó síkmetszetét. Ez a síkmetszet egy háromszög, melynek oldalai 40 cm, 32 cm és 20 cm hosszúak. A 20 cm hosszúságú oldalhoz tartozó magasság a kúp testmagassága. Ennek meghatározásához írjuk fel a háromszögben a koszinusztételt:

$$40^2 = 32^2 + 20^2 - 2 \cdot 32 \cdot 20 \cdot \cos\alpha, \quad \text{ebből} \quad \cos\alpha = 0{,}1375 \quad \Rightarrow \quad \alpha \approx 82{,}1°.$$

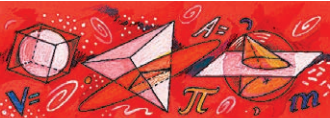
Felhasználva, hogy $m = 32 \cdot \sin\alpha$, kapjuk, hogy $m \approx 31{,}70$.

A kúp magassága megközelítőleg 31,70 cm.

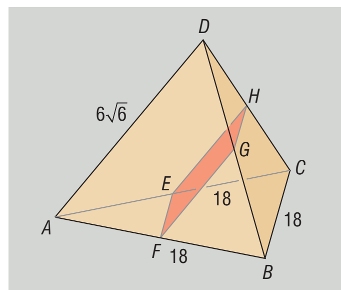
Megjegyzés: m értékét közvetlenül meghatározhattuk volna a Heron-képlet alkalmazásával.

b) A kúp térfogata:

$$V = \frac{r^2 \cdot \pi \cdot m}{3} = \frac{10^2 \cdot \pi \cdot 31{,}70}{3} \approx 3319{,}62\ \text{cm}^3.$$



4378 *a)* Tekintsük a mellékelt ábrát. A gúla AC és AB élének felezőpontja legyen E és F.



Az E és F pontokon áthaladó, az AD éllel párhuzamos sík az ACD és ABD síkokat az AD éllel párhuzamos egyenesben metszi, így az EH és FG szakaszok az ACD és ABD oldallapok középvonalai.

A középvonal tulajdonsága miatt $EH = FG = 3\sqrt{6}$, valamint a H és G pontok a DC és DB élek felezőpontjai. Hasonlóan HG és EF a $BCD_\triangle$ és $BCA_\triangle$ középvonalai, ezért $HG = EF = 9$.

Tehát az $EFGH$ négyszög szemben lévő oldalai egyenlő hosszúak, vagyis a négyszög paralelogramma.

Vizsgáljuk meg a paralelogramma EG és HF átlójának hosszát.

Az FCH és EBG háromszöget vizsgálva:

1. $EB = FC$, mivel a szabályos háromszög súlyvonalai;
2. $HC = GB$, mivel mindkettő egy-egy (egyenlő hosszúságú) oldalél fele;
3. $HCF\sphericalangle = EBG\sphericalangle$, mivel ezek a teraéder egyenlő hosszúságú oldaléleinek az alaplappal bezárt szögei.

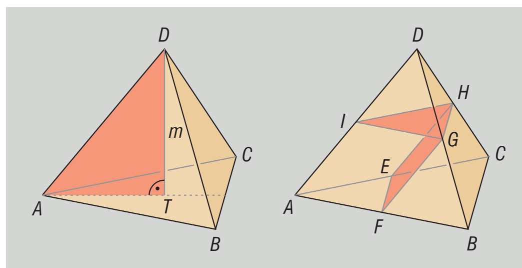
Ez alapján $FCH_\triangle$ és $EBG_\triangle$ egybevágó, tehát $HF = EG$, vagyis az $EFGH$ paralelogramma téglalap.

A téglalap alakú síkmetszet területe:

$$T = a \cdot b = 3\sqrt{6} \cdot 9 = 27\sqrt{6} \approx 66{,}14\ \text{cm}^2.$$

b) Az $ABCD$ tetraéder ABC alaplapjának területe:

$$T = \frac{18^2 \cdot \sqrt{3}}{4} = 81\sqrt{3}.$$



Az alaplaphoz tartozó DT magassága az ábrán látható ATD derékszögű háromszögből határozható meg. A háromszög átfogója a tetraéder éle: $AD = 6\sqrt{6}$, az AT befogója az ABC szabályos háromszög magasságának a kétharmada:

$$AT = \frac{18\sqrt{3}}{2} \cdot \frac{2}{3} = 6\sqrt{3}.$$

A Pitagorasz-tétel alapján:

$$m = \sqrt{\left(6\sqrt{6}\right)^2 - \left(6\sqrt{3}\right)^2} = 6\sqrt{3}.$$

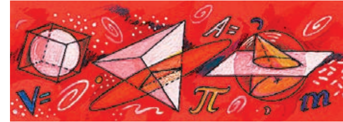
Az $ABCD$ tetraéder térfogata:

$$V = \frac{T \cdot m}{3} = \frac{81\sqrt{3} \cdot 6\sqrt{3}}{3} = 486\ \text{cm}^3.$$

Tekintsük az $EFGH$ sík által a tetraéderből lemetszett $AFEDGH$ testet. Ezt a gúla ABC alaplapjának síkjával párhuzamos HGI sík egy ferde hasábra és egy gúlára osztja.

Az $IGHD$ gúla hasonló az eredeti $ABCD$ gúlához, a hasonlóság aránya $1:2$. Hasonló testek térfogatának aránya a hasonlóság arányának a köbe:

$$V_{IGHD} = \frac{1}{8} V.$$



Az *AFEIGH* test egy ferde hasáb, amelynek az *AFE* alaplapja az eredeti gúla *ABC* alaplapjához hasonló, a hasonlóság aránya $1:2$. Hasonló síkidomok területének aránya a hasonlóság arányának a négyzete:

$$T_{AFE}=\frac{1}{4}T.$$

A hasáb magassága a gúla magasságának fele, így a hasáb térfogata:

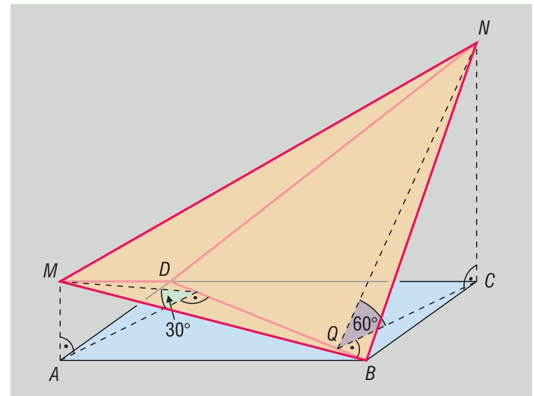
$$V_{AFEIGH}=\frac{1}{4}T\cdot\frac{m}{2}=\frac{3}{8}\cdot\frac{T\cdot m}{3}=\frac{3}{8}V.$$

Az *EFGH* sík által a tetraéderből lemetszett *AFEHGD* test térfogata:

$$\frac{1}{8}V+\frac{3}{8}V=\frac{1}{2}V=\frac{1}{2}\cdot 486=243\ \text{cm}^3.$$

Az *EFGH* sík az *ABCD* tetraédert két egyenlő, 243 cm^3 térfogatú részre osztja.

4379 Az *MBD* és az *NBD* síkok merőlegesek egymásra, mert a téglalap síkjával bezárt szögük 30°, illetve 60°.



A tetraéder térfogatának kiszámításához elég meghatározni az $MBD_\triangle$ területét és kiszámítani a tetraéder ezen lapjához tartozó magasság hosszát.

Az $MBD_\triangle$ merőleges vetülete az $ABD_\triangle$, és a két háromszög síkja által bezárt szög 30°, ezért:

$$t_{MBD}=\frac{t_{ABD}}{\cos 30^\circ}=\frac{\frac{12\cdot 16}{2}}{\frac{\sqrt{3}}{2}}=64\sqrt{3}.$$

Az *MNBD* tetraéder *N* csúcsából induló magassága az *MBD* és az *NBD* síkok merőlegessége alapján a mellékelt ábra szerint az *NQ* szakasz. Mivel az *NBD* sík a téglalap síkjával 60° szöget zár be, $NQC\sphericalangle=60^\circ$.

Az *NQ* szakasz hosszát az *NCQ* fél szabályos háromszög alapján számolhatjuk:

$$NQ=2\cdot QC.$$

Az *ABCD* téglalap *BD* átlójának hossza a Pitagorasz-tétel alapján:

$$BD=\sqrt{16^2+12^2}=20.$$

A *QC* szakasz a *BDC* derékszögű háromszög átfogójához tartozó magassága, amelyet kiszámíthatunk úgy, hogy felírjuk a háromszög területét kétféleképpen:

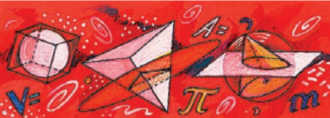
$$\frac{12\cdot 16}{2}=\frac{20\cdot QC}{2}\quad\Rightarrow\quad QC=\frac{48}{5}.$$

Tehát:

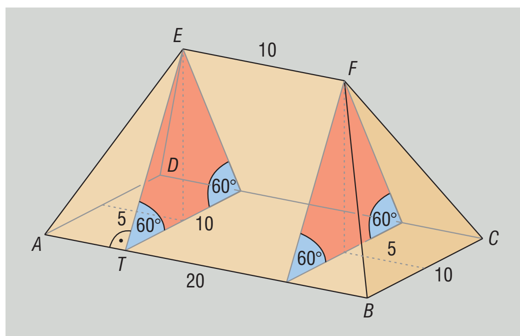
$$NQ=2\cdot QC=\frac{96}{5}.$$

A tetraéder térfogata:

$$V_{MNBD}=\frac{t_{MBD}\cdot NQ}{3}=\frac{64\sqrt{3}\cdot\frac{96}{5}}{3}=\frac{2048\sqrt{3}}{5}\approx 709{,}45\ \text{cm}^3.$$



4380 *a)* Ahhoz, hogy a padlás térfogatát meghatározzuk, vegyük az E és F pontokon áthaladó, az alaplapra merőleges síkokat. Ezek a síkok a padlás térfogatát egy háromszög alapú hasábra, valamint két téglalap alakú gúlára bontják.



Mivel a tető minden oldalról 60°-os szöget zár be a vízszintessel, a hasáb háromszög alaplapja egy 10 m oldalú szabályos háromszög, magassága pedig:

$$m_1 = 20 - 2 \cdot 5 = 10 \text{ m}.$$

A hasáb térfogata:

$$V_{\text{hasáb}} = T \cdot m_1 = \frac{10^2 \cdot \sqrt{3}}{4} \cdot 10 = 250\sqrt{3} \text{ m}^3.$$

A két téglalap alakú gúlát összetolva egy 10 m alapélű szabályos négyoldalú gúlát kapunk. A gúla oldallapjai az alaplappal 60°-os szöget zárnak be, tehát a gúla magassága a 10 m oldalú szabályos háromszög magassága:

$$m_2 = \frac{10\sqrt{3}}{2} = 5\sqrt{3} \text{ m}.$$

A gúla térfogata tehát:

$$V_{\text{gúla}} = \frac{T \cdot m_2}{3} = \frac{10^2 \cdot 5\sqrt{3}}{3} = \frac{500\sqrt{3}}{3} \text{ m}^3.$$

A padlás térfogata légköbméterben:

$$V = V_{\text{hasáb}} + V_{\text{gúla}} = 250\sqrt{3} + \frac{500\sqrt{3}}{3} = \frac{1250\sqrt{3}}{3} \approx 721{,}69 \text{ m}^3.$$

b) A tető felszínét alkotó lapok síkjai 60°-os szöget zárnak be a vízszintessel, és ezeknek a vízszintesre eső merőleges vetületei a 10 m és 20 m oldalú téglalapot adják.

Így a síkidomok merőleges vetületének területére vonatkozó összefüggés alapján a tető felszíne:

$$A = \frac{T_{ABCD}}{\cos 60°} = \frac{200}{\frac{1}{2}} = 400 \text{ m}^2.$$

A tető befedéséhez a 18% hulladék miatt $\frac{400}{0{,}82} \approx 488 \text{ m}^2$ cserepet kell vásárolnunk.

c) A kúpcseréppel $4 \cdot AE + EF$ hosszúságot kell lefednünk. Az AE él hossza az ATE derékszögű háromszögből számítható:

$$AE = \sqrt{5^2 + 10^2} = 5\sqrt{5}.$$

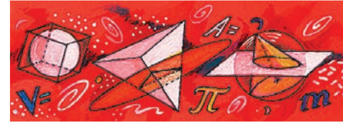
A lefedendő hosszúság:

$$4 \cdot AE + EF = 10 + 4 \cdot 5\sqrt{5} = 10 + 20\sqrt{5} \text{ m}.$$

Mivel a szükséges kúpcserepek száma:

$$\left(10 + 20\sqrt{5}\right) \cdot 5 \cdot 1{,}2 \approx 328{,}33,$$

ezért 329 darab cserepet kell megvásárolni.



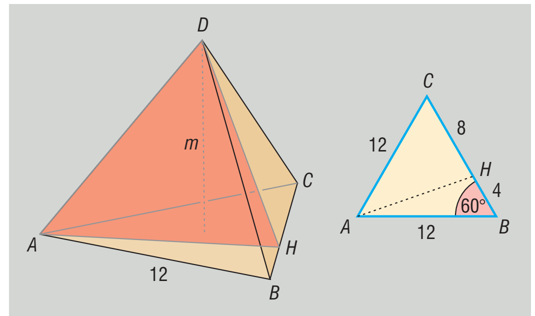
4381 Legyen a gúla alakú ajándéktárgy térfogata V. Ha az alaplapjára állított gúlában fele magasságban áll a folyadék, akkor ezt úgy is felfoghatjuk, hogy a gúlát elmetszettük egy, az alaplapjával párhuzamos síkkal a magasságának felénél. Mivel a lemetszett rész az eredetihez hasonló gúlát ad, és a hasonlóság aránya $1:2$, a lemetszett gúla térfogata úgy aránylik az eredeti gúla térfogatához, mint a hasonlóság arányának a köbe. A lemetszett rész térfogata tehát $\frac{1}{8}V$, a folyadék térfogata pedig $\frac{7}{8}V$.

Ha megfordítjuk a gúlát, akkor tekinthetjük úgy, hogy ismét elmetszettük az alaplap síkjával párhuzamosan, de most a lemetszett rész térfogata a $\frac{7}{8}V$. Innen a hasonlóság aránya: $\sqrt[3]{\frac{7}{8}}$. A gúlában ekkor $\sqrt[3]{\frac{7}{8}} \cdot 10 \approx 9{,}56\ \text{cm}$ magasan áll a folyadék.

4382 Ismert, hogy a tetraéder súlyvonalai negyedelve metszik egymást. Ez azt jelenti, hogy bármely csúcsot a szemben lévő lap súlypontjával összekötve, ennek a szakasznak a lap súlypontjához közelebbi negyedelőpontja a tetraéder S súlypontja.
A tetraéder csúcsai és a lapok súlypontjai a tetraéder S súlypontjára vonatkozó $\lambda = -\frac{1}{3}$ arányú térbeli kicsinyítéssel feleltethetők meg egymásnak. Tehát az eredeti tetraéder és a lapjainak súlypontjai által meghatározott tetraéder hasonló egymáshoz, és a hasonlóság aránya $\frac{1}{3}$.
Ismert, hogy hasonló síkidomok területének aránya a hasonlóság arányának a négyzete, a hasonló testek térfogatának aránya pedig a hasonlóság arányának köbe.
Így a tetraéder lapjainak súlypontjai által meghatározott tetraéder felszíne az eredeti tetraéder felszínének $\left(\frac{1}{3}\right)^2 = \frac{1}{9}$-szerese, térfogata pedig az eredeti tetraéder térfogatának $\left(\frac{1}{3}\right)^3 = \frac{1}{27}$-szerese.

4383 Az ábrán látható $ABCD$ szabályos tetraéder BC élén lévő H pontra igaz, hogy

$$BH : HC = 1:2.$$



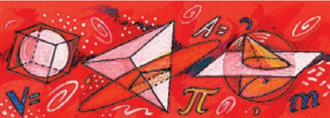
a) Az ADH sík a tetraédert két újabb tetraéderre bontja, amelyek magassága megegyezik az $ABCD$ tetraéder m magasságával.
Ha az $ABC_\triangle$ területe T, akkor az $ABH_\triangle$ területe $\frac{1}{3}T$, az $AHC_\triangle$ területe pedig $\frac{2}{3}T$.
Tehát:

$$V_{ABHD} = \frac{\frac{1}{3}T \cdot m}{3} = \frac{1}{3}V_{ABCD}, \quad \text{valamint} \quad V_{AHCD} = \frac{\frac{2}{3}T \cdot m}{3} = \frac{2}{3}V_{ABCD}.$$

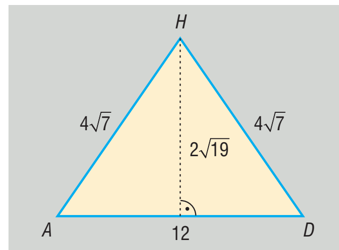
Ismert, hogy a szabályos tetraéder térfogata $V = \frac{\sqrt{2} \cdot a^3}{12}$, így a két rész térfogata:

$$V_{ABHD} = \frac{1}{3}V_{ABCD} = \frac{1}{3} \cdot \frac{\sqrt{2} \cdot 12^3}{12} = 48\sqrt{2} \approx 67{,}88\ \text{cm}^3,$$

$$V_{AHCD} = \frac{2}{3}V_{ABCD} = \frac{2}{3} \cdot \frac{\sqrt{2} \cdot 12^3}{12} = 96\sqrt{2} \approx 135{,}76\ \text{cm}^3.$$



b) A két tetraéder felszínének kiszámításához meg kell adnunk az $AHD_\triangle$ területét.



Ennek a háromszögnek két oldala egyenlő hosszú, mivel AH és DH egyaránt a 12 cm oldalú szabályos háromszög egyik csúcsát köti össze a szemben lévő oldal harmadolópontjával.

Az $AHB_\triangle$-ből koszinusztétellel számítható AH:

$$AH^2 = 12^2 + 4^2 - 2\cdot 12\cdot 4\cdot\cos 60^\circ \quad\Rightarrow\quad AH = 4\sqrt{7}.$$

Az $ADH_\triangle$ két szára $4\sqrt{7}$ cm, alapja 12 cm hosszú. A Pitagorasz-tétellel számíthatjuk a háromszög alaphoz tartozó magasságát:

$$\sqrt{\left(4\sqrt{7}\right)^2 - 6^2} = 2\sqrt{19}.$$

Az $ADH_\triangle$ területe:

$$T_{ADH} = \frac{12\cdot 2\sqrt{19}}{2} = 12\sqrt{19}.$$

Használjuk ki, hogy:

$$T_{ABH} = T_{DBH} = \frac{1}{3}T_{ABC}, \quad \text{illetve} \quad T_{ACH} = T_{DCH} = \frac{2}{3}T_{ABC},$$

és írjuk fel a két tetraéder felszínét:

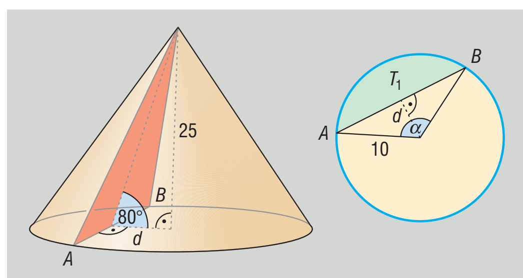
$$A_{ABHD} = T_{AHD} + T_{ABD} + 2\cdot T_{AHB} = T_{AHD} + T_{ABC} + 2\cdot\frac{1}{3}T_{ABC} = T_{AHD} + \frac{5}{3}T_{ABC} =$$

$$= 12\sqrt{19} + \frac{5}{3}\cdot\frac{12^2\cdot\sqrt{3}}{4} = 12\sqrt{19} + 60\sqrt{3} \approx 156{,}23\ \text{cm}^2,$$

$$A_{AHCD} = T_{AHD} + T_{ACD} + 2\cdot T_{AHC} = T_{AHD} + T_{ABC} + 2\cdot\frac{2}{3}T_{ABC} = T_{AHD} + \frac{7}{3}T_{ABC} =$$

$$= 12\sqrt{19} + \frac{7}{3}\cdot\frac{12^2\cdot\sqrt{3}}{4} = 12\sqrt{19} + 84\sqrt{3} \approx 198{,}80\ \text{cm}^2.$$

4384 Tekintsük a mellékelt ábrát. A keletkezett részek olyan kúpszerű testek, amelyek magasságai az eredeti forgáskúp m magasságával egyenlők. A két kúpszerű test alaplapja az a két körszelet, amelyet az ábrán látható AB húr hoz létre az alapkörön. Ezek területének meghatározásához számoljuk ki az AB húr és az alapkör középpontjának d távolságát:



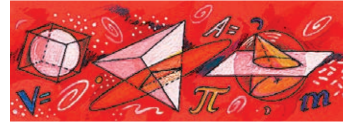
$$d = \frac{25}{\text{tg}\,80^\circ}.$$

Ez alapján számolható az ábrán látható kisebbik körszelet α középponti szöge:

$$\cos\frac{\alpha}{2} = \frac{d}{10} = \frac{\frac{25}{\text{tg}\,80^\circ}}{10} \quad\Rightarrow\quad \alpha \approx 127{,}69^\circ.$$

A kisebbik körszelet területe:

$$T_1 = 10^2\cdot\pi\cdot\frac{127{,}69^\circ}{360^\circ} - \frac{10^2\cdot\sin 127{,}69^\circ}{2} \approx 71{,}86\ \text{cm}^2.$$



A kisebbik rész térfogata:

$$V_1 = \frac{T_1 \cdot m}{3} = \frac{71,86 \cdot 25}{3} \approx 598,83\ \text{cm}^3.$$

A nagyobbik rész térfogatát megkaphatjuk úgy, hogy a teljes gúla térfogatából kivonjuk a kisebbik rész térfogatát:

$$V_2 = \frac{10^2 \cdot \pi \cdot 25}{3} - 598,83 \approx 2019,16\ \text{cm}^3.$$

4385 Legyen a forgáskúp és a henger alapkörének sugara r, magassága m. Ha a forgáskúp alkotója a, akkor:

$$a = \sqrt{r^2 + m^2}.$$

A forgáshenger és a forgáskúp felszínének aránya:

$$\frac{A_{\text{henger}}}{A_{\text{kúp}}} = \frac{2r \cdot \pi \cdot (r+m)}{r \cdot \pi \cdot (r+a)} = \frac{2(r+m)}{r + \sqrt{r^2+m^2}}.$$

A feladat feltétele alapján:

$$\frac{2(r+m)}{r + \sqrt{r^2+m^2}} = \frac{8}{5}.$$

Ekvivalens átalakítások után a következő egyenletet kapjuk:

$$15r^2 - 10r \cdot m - 9m^2 = 0.$$

Mivel a forgáskúp nyílásszögére van szükségünk, elég az egyenletből $\frac{r}{m}$-et, a fél nyílásszög tangensét kifejeznünk:

$$15 \cdot \left(\frac{r}{m}\right)^2 - 10 \cdot \frac{r}{m} - 9 = 0 \quad \Rightarrow \quad \left(\frac{r}{m}\right)_{1,2} = \frac{10 \pm \sqrt{640}}{30}.$$

Mivel a hegyesszög tangense nem lehet negatív:

$$\operatorname{tg}\frac{\varphi}{2} = \frac{r}{m} = \frac{10 + 8\sqrt{10}}{30} = \frac{5 + 4\sqrt{10}}{15} \quad \Rightarrow \quad \varphi \approx 99,28°.$$

A kúp nyílásszöge 99,28°.

4386 Legyen a forgáskúp alapkörének sugara r, magassága m, alkotója a. A feladat feltétele alapján:

$$r \cdot \pi \cdot (r+a) = 634,86 \quad \text{és} \quad \frac{2r \cdot m}{2} = 90.$$

Ismert, hogy $a = \sqrt{r^2+m^2}$, tehát az első egyenlet így is írható:

$$r \cdot \pi \cdot \left(r + \sqrt{r^2+m^2}\right) = 634,86 \quad \Rightarrow \quad r^2 + r \cdot \sqrt{r^2+m^2} = \frac{634,86}{\pi}.$$

A második egyenletből $m = \frac{90}{r}$, amit az elsőbe behelyettesítve:

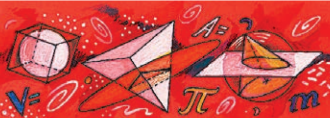
$$r^2 + r \cdot \sqrt{r^2 + \left(\frac{90}{r}\right)^2} = \frac{634,86}{\pi},$$

$$r \cdot \sqrt{r^2 + \left(\frac{90}{r}\right)^2} = \frac{634,86}{\pi} - r^2.$$

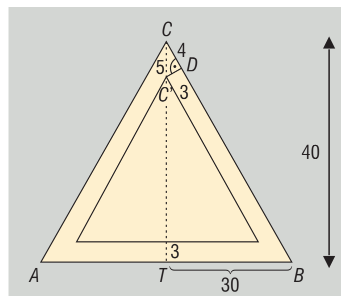
Négyzetre emelés és rendezés után $r^2 = 81$. Mivel r pozitív, $r = 9$. A kúp magassága $m = \frac{90}{r} = 10$.

A kúp térfogata:

$$V = \frac{r^2 \cdot \pi \cdot m}{3} = \frac{9^2 \cdot \pi \cdot 10}{3} = 270\pi \approx 848,23\ \text{cm}^3.$$



4387 A külső kúp és a belső kúp hasonló, mivel nyílásszögük egyenlő. Tekintsük a test tengelymetszetét.



Az ábra jelöléseit használva a TBC háromszög hasonló a $DC'C$ háromszöghöz, mivel szögeik páronként egyenlők. A két háromszög megfelelő oldalai hosszának aránya egyenlő:

$$\frac{CD}{C'D} = \frac{TC}{TB} \quad \Rightarrow \quad CD = C'D \cdot \frac{TC}{TB} = 3 \cdot \frac{40}{30} = 4.$$

A CC' szakasz hossza a Pitagorasz-tétel alapján 5 cm.

Ez alapján a belső kúp magassága: $40 - 3 - 5 = 32$.

A két kúp hasonlóságának aránya, a magasságaik aránya: $\frac{32}{40} = \frac{4}{5}$, tehát a térfogataik aránya: $\left(\frac{4}{5}\right)^3$.

A bakelit térfogatát a külső és belső kúpok térfogatának különbsége adja:

$$V = V_{\text{külső}} - V_{\text{belső}} = V_{\text{külső}} - \left(\frac{4}{5}\right)^3 \cdot V_{\text{külső}} =$$

$$= \frac{61}{125} \cdot V_{\text{külső}} = \frac{61}{125} \cdot \frac{30^2 \cdot \pi \cdot 40}{3} = 5856\pi \approx 18397{,}17 \text{ cm}^3 \approx 18{,}40 \text{ dm}^3.$$

a) A test tömege:

$$m = \rho \cdot V = 1{,}3 \cdot 18{,}40 = 23{,}92 \text{ kg}.$$

b) Arkhimédész törvénye alapján ha egy test átlagos sűrűsége kisebb, mint a vízé, akkor úgy úszik a vízen, hogy a test tömegével megegyező tömegű vizet szorít ki.

Mivel az átlagsűrűség

$$\rho_{\text{átlag}} = \frac{m}{V_{\text{külső}}} = \frac{23{,}92 \text{ kg}}{37{,}68 \text{ dm}^3} < 1 \frac{\text{kg}}{\text{dm}^3} = \rho_{\text{víz}},$$

ezért a test úszik.

A csúcsával lefelé fordított test olyan mélyen merül a vízbe, hogy a víz alatti forgáskúp térfogata $23{,}92 \text{ dm}^3 = 23\,920 \text{ cm}^3$. A víz alatti forgáskúp hasonló a külső forgáskúphoz. Hasonlóságuk aránya a magasságaik aránya, amelynek köbe a térfogataik aránya.

Ha a test h cm mélyen merül a vízbe, akkor:

$$\left(\frac{h}{40}\right)^3 = \frac{23920}{37680} \quad \Rightarrow \quad h \approx 34{,}37.$$

A csúcsával lefelé fordított test $34{,}37$ cm mélyre merül a vízben.

4388 Legyen a körlapból készült kúp alapkörének sugara r, alkotója $a = 20$ cm.

A kivágandó körcikk ívhossza éppen a kúp alapkörének kerülete:

$$i = 2r \cdot \pi.$$

A Pitagorasz-tétel alapján a kúp magassága:

$$m = \sqrt{a^2 - r^2} = \sqrt{20^2 - r^2},$$

tehát a kúp térfogata:

$$V = \frac{r^2 \cdot \pi \cdot \sqrt{20^2 - r^2}}{3} = \frac{\pi}{3} \cdot \sqrt{400r^4 - r^6}.$$



Ez utóbbi pozitív kifejezés maximuma helyett elég keresni az alábbi függvény maximumát:

$$f(r) = 400r^4 - r^6 \quad (r > 0).$$

Ennek a függvénynek ott lehet maximuma, ahol az első deriváltja 0:

$$f'(r) = 1600r^3 - 6r^5 = r^3 \cdot \left(1600 - 6r^2\right).$$

Pozitív r-eket tekintve, ennek a függvénynek $r = \sqrt{\frac{1600}{6}} = \sqrt{\frac{800}{3}}$ helyen van zérushelye.

Az első derivált előjele pozitív, ha $0 < r < \sqrt{\frac{800}{3}}$, és negatív, ha $\sqrt{\frac{800}{3}} < r$, tehát $r = \sqrt{\frac{800}{3}}$ esetén $f(r)$ függvénynek maximuma van.

A kúp térfogata akkor maximális, ha $r = \sqrt{\frac{800}{3}}$, vagyis a kivágandó körcikk ívhossza:

$$i = 2r \cdot \pi = 2 \cdot \sqrt{\frac{800}{3}} \cdot \pi.$$

Ebből kiszámolható a 20 cm sugarú körcikk α középponti szöge:

$$2 \cdot 20 \cdot \pi \cdot \frac{\alpha}{360^\circ} = 2 \cdot \sqrt{\frac{800}{3}} \cdot \pi \quad \Rightarrow \quad \alpha = 293{,}94^\circ.$$

Egy $293{,}94^\circ$ középponti szögű körcikket kell kivágnunk ahhoz, hogy a kúp térfogata a legnagyobb legyen.

A csonka gúla és a csonka kúp – megoldások

4389 A négyzet alapú csonka gúla térfogata: 9250 cm^3.

4390 A szabályos háromszög alapú csonka gúla térfogata: $570\sqrt{3} \approx 987{,}27$ cm^3.

4391 A csonka gúla magassága: 30 cm.

4392 A tartályba 2100 liter folyadék fér.

4393 A bura elkészítéséhez $2083{,}53$ cm^2 vászon szükséges.

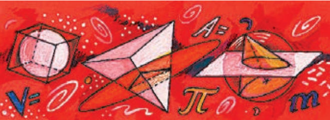
4394 *a)* A csonka gúla egy oldallapjának a magassága: 26 cm.
b) A csonka gúla oldalélének a hossza: $26{,}12$ cm.

4395 A csonka gúla fedőlapjának éle: 7 cm.

4396 A fez $24{,}71$ cm magas.

4397 Az egyenes csonka kúp
a) alkotója: $12{,}37$ cm;
b) felszíne: $1128{,}74$ cm^2;
c) térfogata: $2752{,}04$ cm^3.

4398 Az egyenes csonka kúp
a) fedőlapjának sugara: 9 cm;
b) felszíne: $546\pi \approx 1715{,}31$ cm^2;
c) térfogata: $1176\pi \approx 3694{,}51$ cm^3.



4399 Az egyenes csonka kúp

a) magassága: 10 cm; *b)* alkotója: 16,40 cm; *c)* felszíne: 2801,67 cm^2.

4400 *a)* Az egyenes csonka körkúp felszíne: $2300\pi \approx 7225{,}66$ cm^2.

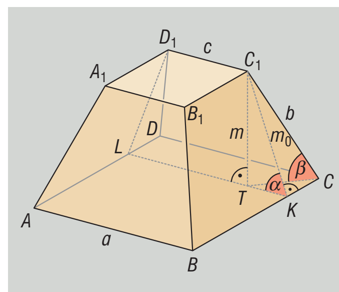
b) Az egyenes csonka körkúp térfogata: $\frac{19000\sqrt{3}}{3} \cdot \pi \approx 34\,462{,}19$ cm^3.

4401 A keletkezett forgástest egyenes csonka körkúp, amelynek felszíne: $98\pi \approx 307{,}88$ cm^2, térfogata pedig: $\frac{98\sqrt{15}\cdot\pi}{3} \approx 397{,}47$ cm^3.

4402 Az egyenes csonka kúp

a) alkotója: 15 cm; *b)* magassága: 13,75 cm; *c)* térfogata: 17 408,35 cm^3.

4403 Tekintsük az ábrán látható $ABCDA_1B_1C_1D_1$ négyzet alapú egyenes csonka gúlát.



Vegyük a csonka gúla C_1 és D_1 csúcsain áthaladó, az alaplapra merőleges LKC_1D_1 húrtrapéz síkmetszetét.

A trapéz alapjainak hossza $a = 12$ cm és $c = 6$ cm, valamint magassága $m = 8$ cm.

a) A csonka gúla oldallapjának magassága az LKC_1D_1 trapéz szára, amelynek hossza a Pitagorasz-tétel alapján:

$$m_o = \sqrt{m^2 + \left(\frac{a-c}{2}\right)^2} = \sqrt{8^2 + \left(\frac{12-6}{2}\right)^2} = \sqrt{73} \approx 8{,}54.$$

A csonka gúla oldallapjának a magassága: $\sqrt{73} \approx 8{,}54$ cm.

b) A csonka gúla b oldalélének hosszát a csonka gúla BCC_1B_1 oldallapjának segítségével Pitagorasz tételével számíthatjuk:

$$b = \sqrt{m_o^2 + \left(\frac{a-c}{2}\right)^2} = \sqrt{\left(\sqrt{73}\right)^2 + \left(\frac{12-6}{2}\right)^2} = \sqrt{82} \approx 9{,}06.$$

A csonka gúla oldaléle: $\sqrt{82} \approx 9{,}06$ cm.

c) A csonka gúla oldallapjának és alaplapjának α hajlásszöge az LKC_1D_1 trapéz K csúcsánál levő szöge, amelynek nagysága a TKC_1 derékszögű háromszögből:

$$\operatorname{tg}\alpha = \frac{m}{\frac{a-c}{2}} = \frac{8}{3} \quad \Rightarrow \quad \alpha \approx 69{,}44°.$$

A csonka gúla oldallapjának és alaplapjának hajlásszöge: 69,44°.

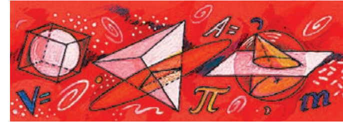
d) A csonka gúla térfogata:

$$V = \frac{m}{3}\cdot\left(T + \sqrt{T\cdot t} + t\right) = \frac{m}{3}\cdot\left(a^2 + a\cdot c + c^2\right) = \frac{8}{3}\cdot\left(12^2 + 12\cdot 6 + 6^2\right) = 672 \text{ cm}^3.$$

e) A csonka gúla felszíne:

$$A = T + t + A_{\text{palást}} = a^2 + c^2 + 4\cdot\frac{m_o\cdot(a+c)}{2} = 12^2 + 6^2 + 4\cdot\frac{\sqrt{73}\cdot(12+6)}{2} =$$

$$= 180 + 36\sqrt{73} \approx 487{,}58 \text{ cm}^2.$$



4404 Használjuk a 4403. feladat jelöléseit: $a = 12$ cm, $c = 4$ cm és $b = 15$ cm.

a) A csonka gúla oldallapjának m_o magassága a BCC_1B_1 trapézból a Pitagorasz-tétel alapján számolható:

$$m_o = \sqrt{b^2 - \left(\frac{a-c}{2}\right)^2} = \sqrt{15^2 - \left(\frac{12-4}{2}\right)^2} = \sqrt{209} \approx 14{,}46.$$

A csonka gúla oldallapjának a magassága: 14,46 cm.

b) A csonka gúla testmagassága az LKC_1D_1 trapéz magassága. Hossza a Pitagorasz-tétel alapján:

$$m = \sqrt{m_o^2 - \left(\frac{a-c}{2}\right)^2} = \sqrt{193} \approx 13{,}89.$$

A testmagassága: 13,89 cm.

c) A csonka gúla oldaléle és az alaplapja által bezárt β szög a TCC_1 szög, amely a TCC_1 derékszögű háromszögből szinusz szögfüggvénnyel meghatározható:

$$\sin\beta = \frac{m}{b} = \frac{\sqrt{193}}{15} \quad \Rightarrow \quad \beta \approx 67{,}84°.$$

A csonka gúla oldalélének az alaplappal bezárt szöge: 67,84°.

d) A csonka gúla térfogata:

$$V = \frac{m}{3}\cdot\left(T + \sqrt{T\cdot t} + t\right) = \frac{m}{3}\cdot\left(a^2 + a\cdot c + c^2\right) = \frac{208\sqrt{193}}{3} \approx 963{,}21\ \text{cm}^3.$$

e) A csonka gúla felszíne:

$$A = T + t + A_{\text{palást}} = a^2 + c^2 + 4\cdot\frac{m_o\cdot(a+c)}{2} = 160 + 32\sqrt{209} \approx 622{,}62\ \text{cm}^2.$$

4405 Legyen $a = 18$ cm, $c = 10$ cm.

A négyzet alapú egyenes csonka gúla felszíne:

$$A = T + t + A_{\text{palást}} = a^2 + c^2 + 4\cdot\frac{m_o\cdot(a+c)}{2},$$

amiből a csonka gúla oldallapjának m_o magasságára $m_o = 15$ adódik.

A 4403. feladat ábráját használva a csonka gúla testmagassága az LKC_1D_1 trapéz magassága. Hossza a Pitagorasz-tétel alapján:

$$m = \sqrt{209} \approx 14{,}46.$$

A csonka gúla térfogata:

$$V = \frac{m}{3}\cdot\left(T + \sqrt{T\cdot t} + t\right) = \frac{m}{3}\cdot\left(a^2 + a\cdot c + c^2\right) = \frac{604\sqrt{209}}{3} \approx 2910{,}64\ \text{cm}^3.$$

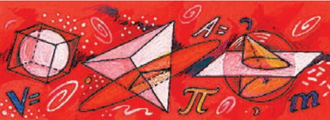
4406 Mivel a szabályos négyzet alapú csonka gúla alapterülete $36\ \text{cm}^2$, az alapéle $a = 6$ cm. A fedőlap területe $18\ \text{cm}^2$, tehát a fedőlap c éle $c = 3\sqrt{2}$ cm.

Mivel ismerjük a csonka gúla térfogatát, a

$$V = \frac{m}{3}\cdot\left(T + \sqrt{T\cdot t} + t\right) = \frac{m}{3}\cdot\left(a^2 + a\cdot c + c^2\right)$$

képlet alkalmazásával a magassága kiszámítható:

$$m = \frac{30\cdot\left(3-\sqrt{2}\right)}{7} \approx 6{,}80\ \text{cm}.$$



A 4403. feladat ábráját használva, a csonka gúla oldallapjának magassága az LKC_1D_1 trapéz szára, amelynek hossza a Pitagorasz-tétel alapján:

$$m_o = \sqrt{m^2 + \left(\frac{a-c}{2}\right)^2} = \sqrt{6{,}80^2 + \left(\frac{6-3\sqrt{2}}{2}\right)^2} \approx 6{,}86.$$

A szabályos négyzet alapú csonka gúla egy oldallapjának területe:

$$T_{\text{oldallap}} = \frac{m_o \cdot (a+c)}{2} \approx 35{,}13 \text{ cm}^2.$$

4407 Ha a szabályos négyzet alapú csonka gúla alapéle $a = 20$ cm, akkor az alaplap területe $T = 400 \text{ cm}^2$, a fedőlapé $t = 100 \text{ cm}^2$, ahonnan a fedőlap éle $c = 10$ cm.

A palást területe:

$$A_{\text{palást}} = 5 \cdot 100 = 500 \text{ cm}^2,$$

és mivel négy egybevágó szimmetrikus trapézból áll, ezért egy trapéz területe 125 cm^2.

Az oldallap m_o magassága számítható a területből:

$$T_{\text{trapéz}} = \frac{m_o \cdot (a+c)}{2} \quad \Rightarrow \quad m_o = \frac{2 \cdot T_{\text{trapéz}}}{(a+c)} = \frac{2 \cdot 125}{20+10} = \frac{25}{3}.$$

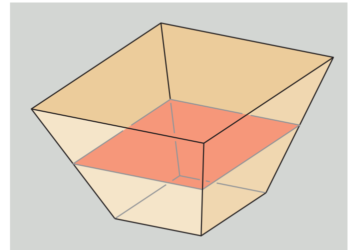
A 4403. feladat ábráját használva a csonka gúla testmagassága az LKC_1D_1 trapéz magassága. Hossza Pitagorasz-tétel alapján:

$$m = \sqrt{m_o^2 - \left(\frac{a-c}{2}\right)^2} = \sqrt{\left(\frac{25}{3}\right)^2 - \left(\frac{20-10}{2}\right)^2} = \frac{20}{3}.$$

A csonka gúla térfogata:

$$V = \frac{m}{3} \cdot \left(T + \sqrt{T \cdot t} + t\right) = \frac{m}{3} \cdot \left(a^2 + a \cdot c + c^2\right) = \frac{14000}{9} \approx 1555{,}56 \text{ cm}^3.$$

4408 A félig megtöltött virágládában lévő virágföld térfogata egy olyan szabályos négyoldalú csonka gúla térfogatával egyezik meg, amelynek magassága a csonka gúla magasságának fele, $m = \frac{20}{2} = 10$ cm, az alapéle 14 cm, a fedőlap éle pedig a láda trapéz oldallapjának a középvonala $c = \frac{20+14}{2} = 17$ cm.

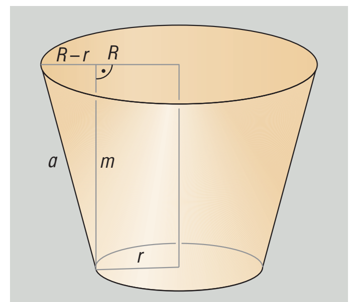


A virágföld térfogata:

$$V = \frac{m}{3} \cdot \left(T + \sqrt{T \cdot t} + t\right) = \frac{m}{3} \cdot \left(a^2 + ac + c^2\right) = \frac{10}{3} \cdot \left(14^2 + 14 \cdot 17 + 17^2\right) = 2410 \text{ cm}^3.$$

A virágládában $2410 \text{ cm}^3 = 2{,}41$ liter virágföld van.

4409 Az egyenes csonka kúp alakú bádogvödör alapkörének sugara $r = 10$ cm, fedőkörének sugara $R = 13$ cm, a magassága pedig $m = 36$ cm.

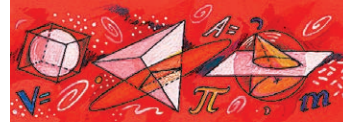


a) A vödör térfogata:

$$V = \frac{m \cdot \pi}{3} \cdot \left(R^2 + R \cdot r + r^2\right) =$$

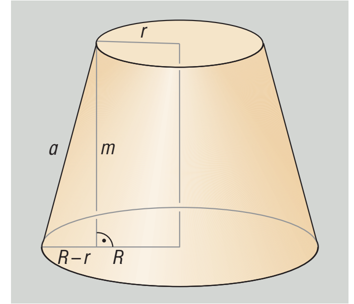
$$= \frac{36\pi}{3} \cdot \left(10^2 + 10 \cdot 13 + 13^2\right) = 4788\pi \approx 15041{,}95 \text{ cm}^3.$$

A vödörbe 15 liter víz fér.



b) A vödör a alkotójának hosszát a Pitagorasz-tétellel számíthatjuk:
$$a = \sqrt{m^2 + (R - r)^2} = \sqrt{1305} = 3\sqrt{145}.$$
Az egy vödör elkészítéséhez szükséges bádog mennyisége:
$$A = \left(R^2 + a \cdot (R + r)\right) \cdot \pi = \left(100 + 69\sqrt{145}\right) \cdot \pi \text{ cm}^2.$$
A többletértéket is figyelembe véve 1000 vödörhöz
$$1000 \cdot \left(100 + 69\sqrt{145}\right) \cdot \pi \cdot 1{,}18 \approx 3\,450\,809 \text{ cm}^2,$$
azaz $345{,}08 \text{ m}^2$ bádog szükséges.

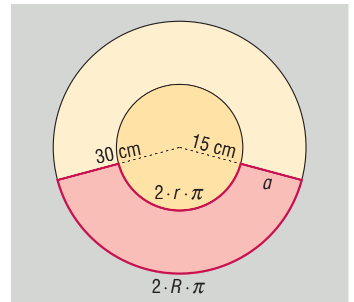
4410 Az egyenes csonka kúp felszínét az
$$A = \left(r^2 + R^2 + a \cdot (R + r)\right) \cdot \pi$$
képlet alapján számolva a $0 = r^2 + 10r - 96$ másodfokú egyenletet kapjuk, melynek megoldásai:
$$r_1 = \frac{-10 + 22}{2} = 6 \quad \text{és} \quad r_2 = \frac{-10 - 22}{2} = -16.$$



a) Az fedőlap sugara csak pozitív szám lehet, így $r = 6$ cm.

b) Az egyenes csonka kúp m magasságát a Pitagorasz-tétellel meghatározhatjuk:
$$m = \sqrt{a^2 - (R - r)^2} = \sqrt{10^2 - (12 - 6)^2} = 8 \text{ cm}.$$
A csonka gúla térfogata:
$$V = \frac{m \cdot \pi}{3} \cdot \left(R^2 + R \cdot r + r^2\right) = \frac{8\pi}{3} \cdot \left(12^2 + 12 \cdot 6 + 6^2\right) = 672\pi \approx 2111{,}15 \text{ cm}^3.$$

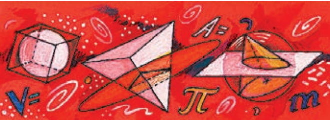
4411 A csonka kúp alkotója a két kör sugarának a különbsége:
$$a = 30 - 15 = 15 \text{ cm}.$$
Az alapkör kerülete a 30 cm sugarú kör 150°-os középponti szögéhez tartozó ív hossza:
$$2 \cdot R \cdot \pi = 2 \cdot 30 \cdot \pi \cdot \frac{150°}{360°} \quad \Rightarrow \quad R = \frac{25}{2} \text{ cm}.$$



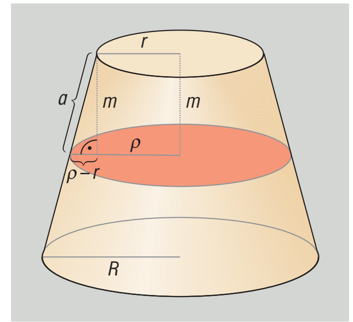
Az fedőkör kerülete a 15 cm sugarú kör 150°-os középponti szögéhez tartozó ív hossza:
$$2 \cdot r \cdot \pi = 2 \cdot 15 \cdot \pi \cdot \frac{150°}{360°} \quad \Rightarrow \quad r = \frac{25}{4} \text{ cm}.$$

a) A csonka kúp felszíne:
$$A = \left(R^2 + r^2 + a \cdot (R + r)\right) \cdot \pi = \frac{7625}{16}\pi \approx 1497{,}17 \text{ cm}^2.$$

b) A térfogat meghatározásához szükségünk van a csonka gúla m magasságára. A Pitagorasz-tétel alapján:
$$m = \sqrt{a^2 - (r - R)^2} = \sqrt{15^2 - \left(\frac{25}{2} - \frac{25}{4}\right)^2} = \frac{5\sqrt{119}}{4} \text{ cm}.$$
A csonka kúp térfogata:
$$V = \frac{m \cdot \pi}{3} \cdot \left(R^2 + R \cdot r + r^2\right) = \frac{21875 \cdot \sqrt{119} \cdot \pi}{192} \approx 3904{,}54 \text{ cm}^3.$$



4412 Ha az egyenes csonka kúpot az alaplappal párhuzamos síkkal magasságának felénél két részre vágjuk, akkor a síkmetszet egy olyan kör, amelynek sugara az alapkör és fedőkör sugarának számtani közepe. Az alapkör sugara $R = 30$ cm, a fedőlap sugara $r = 20$ cm, a síkmetszet sugara $\rho = \dfrac{R+r}{2} = 25$ cm.



A levágott felső csonka kúp alapkörének sugara $\rho = 25$ cm, fedőkörének sugara $r = 20$ cm, magassága pedig $m = 30$ cm. A felső csonka kúp a alkotójának hossza a Pitagorasz-tétel alapján:

$$a = \sqrt{m^2 + (\rho - r)^2} = \sqrt{925} = 5\sqrt{37} \text{ cm}.$$

A levágott felső csonka kúp felszíne:

$$A = \left(\rho^2 + r^2 + a \cdot (\rho + r)\right) \cdot \pi = \left(1025 + 225\sqrt{37}\right) \cdot \pi \approx 7519{,}78 \text{ cm}^2.$$

A levágott felső csonka kúp térfogata:

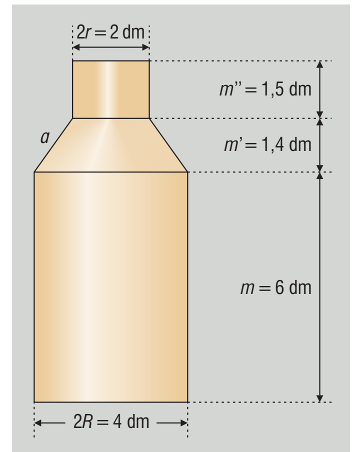
$$V = \frac{m \cdot \pi}{3} \cdot \left(\rho^2 + \rho \cdot r + r^2\right) = 15250\pi \approx 47909{,}29 \text{ cm}^3.$$

4413 *a)* Az alsó egyenes körhenger térfogata:

$$V_1 = R^2 \cdot \pi \cdot m = 24\pi \text{ dm}^3.$$

A középső egyenes csonka kúp alakú rész térfogata:

$$V_2 = \frac{m' \cdot \pi}{3} \cdot \left(R^2 + R \cdot r + r^2\right) = \frac{49}{15}\pi \text{ dm}^3.$$



A felső hengeres részben $1{,}5 - 0{,}2 = 1{,}3$ dm magasságig állhat méz, ennek térfogata:

$$V_3 = r^2 \cdot \pi \cdot m'' = \frac{13}{10}\pi \text{ dm}^3.$$

A bödönbe önthető méz térfogata legfeljebb:

$$V = V_1 + V_2 + V_3 = \frac{857}{30}\pi \approx 89{,}74 \text{ dm}^3.$$

Tehát a bödönbe $m_{méz} = V \cdot \rho = 125{,}64$ kg méz fér.

b) A bödön fenekéhez, illetve az alsó hengeres rész palástjához

$$A_1 = R^2 \cdot \pi = 4\pi \text{ dm}^2, \quad \text{illetve} \quad A_2 = 2R \cdot \pi \cdot m = 24\pi \text{ dm}^2$$

bádoglemez szükséges.

A középső csonka kúp palástját az alkotó segítségével határozhatjuk meg. Az alkotó hosszát a Pitagorasz-tétellel számítjuk:

$$a = \sqrt{(m')^2 + (R - r)^2} = \sqrt{1{,}4^2 + (2-1)^2} = \frac{\sqrt{74}}{5} \text{ dm},$$

így a palást felszíne:

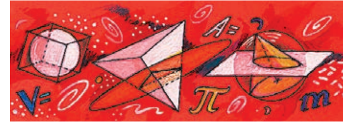
$$A_3 = a \cdot (R + r) \cdot \pi = \frac{\sqrt{74}}{5} \cdot (2+1) \cdot \pi = \frac{3\sqrt{74}}{5} \cdot \pi \text{ dm}^2.$$

A felső hengeres rész palástja:

$$A_4 = 2r \cdot \pi \cdot m'' = 3\pi \text{ dm}^2.$$

A bödön elkészítéséhez szükséges bádog mennyisége a 8%-os többlettel együtt:

$$A = (A_1 + A_2 + A_3 + A_4) \cdot 1{,}08 = \frac{155 + 3\sqrt{74}}{5} \cdot \pi \cdot 1{,}08 \approx 122{,}69 \text{ dm}^2.$$



4414 Az eredeti gúla térfogata:

$$V = \frac{T \cdot m}{3} = 4000\pi \ \text{cm}^3.$$

A levágott gúla hasonló az eredetihez, és térfogata:

$$4000\pi - 1000\pi = 3000\pi \ \text{cm}^3.$$

A levágott és eredeti gúla térfogatának aránya a hasonlóság arányának a köbe, így:

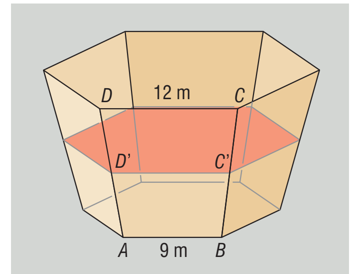
$$\lambda = \sqrt[3]{\frac{3000\pi}{4000\pi}} = \sqrt[3]{\frac{3}{4}}.$$

Ha a csonka gúla keresett magassága m, akkor a levágott gúla magassága $40 - m$.
A levágott és az eredeti gúla magasságának aránya:

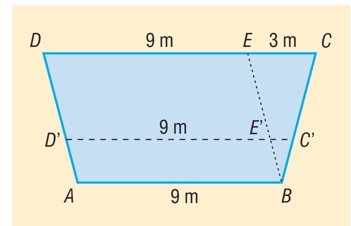
$$\lambda = \frac{40 - m}{40} \quad \Rightarrow \quad \sqrt[3]{\frac{3}{4}} = \frac{40 - m}{40} \quad \Rightarrow \quad m = 40\left(1 - \sqrt[3]{\frac{3}{4}}\right) \approx 3{,}66 \ \text{cm}.$$

A csonka gúla magassága: 3,66 cm.

4415 *a)* A medencében lévő víz térfogatának meghatározásához ki kell számolnunk, hogy a víz felülete hány négyzetméter. Ehhez meg kell adnunk annak a szabályos hatszögnek az oldalhosszát, amelyet az alappal párhuzamos sík metsz ki a csonka gúlából.



Tekintsük a medence egy $ABCD$ húrtrapéz oldallapját, amelynek két alapja 12 m és 9 m. Az előbb említett hatszög oldala a trapéz szárainak a kisebbik alaphoz közelebbi harmadolópontjait összekötő $D'C'$ szakasz.



Húzzunk párhuzamost az AD szárral B csúcson keresztül. Ez a párhuzamos DC-t E-ben, $D'C'$-t E'-ben metszi. A létrejött $ABED$ négyszög szemben lévő oldalai párhuzamosak, tehát paralelogramma, ezért $DE = 9$ m és $EC = 3$ m.

Mivel $D'C'$ párhuzamos az alapokkal, a párhuzamos szelőszakaszok tételét felírva az EBC szögre:

$$\frac{E'C'}{EC} = \frac{BC'}{BC} \quad \Rightarrow \quad \frac{E'C'}{3} = \frac{1}{3} \quad \Rightarrow \quad E'C' = 1 \ \text{m}.$$

A szabályos hatszög alakú vízfelület oldaléle:

$$D'C' = 1 + 9 = 10 \ \text{m}.$$

A medencében lévő víz egy olyan csonka gúla térfogatával egyezik meg, amelynek magassága 2 m, az alaplapja 9 m oldalú, fedőlapja 10 m oldalú szabályos hatszög.

Az alaplap területe:

$$T = 6 \cdot \frac{9^2 \cdot \sqrt{3}}{4} = \frac{243\sqrt{3}}{2}.$$

A fedőlap területe:

$$t = 6 \cdot \frac{10^2 \cdot \sqrt{3}}{4} = 150\sqrt{3}.$$

A medencében lévő víz térfogata:

$$V = \frac{m}{3} \cdot \left(T + \sqrt{T \cdot t} + t\right) = \frac{2}{3} \cdot \left(\frac{243\sqrt{3}}{2} + \sqrt{\frac{243\sqrt{3}}{2} \cdot 150\sqrt{3}} + 150\sqrt{3}\right) = 271\sqrt{3} \approx 469{,}39 \ \text{m}^3.$$



b) Az *a)* részhez hasonló gondolatmenet alapján járunk el.

Ebben az esetben a húrtrapéz oldallapnak a szárak hosszabbik alap felé eső harmadolópontjait összekötő $D''C''$ szakasz hosszát kell meghatároznunk.

A szabályos hatszög alakú vízfelület oldaléle:

$$D''C'' = 9 + \frac{2}{3} \cdot 3 = 11 \text{ m}.$$



A medencében lévő víz egy olyan csonka gúla térfogatával egyezik meg, amelynek magassága 4 m, az alaplapja 9 m oldalú, fedőlapja 11 m oldalú szabályos hatszög.

Az alaplap területe:

$$T = 6 \cdot \frac{9^2 \cdot \sqrt{3}}{4} = \frac{243\sqrt{3}}{2}.$$

A fedőlap területe:

$$t = 6 \cdot \frac{11^2 \cdot \sqrt{3}}{4} = \frac{363\sqrt{3}}{2}.$$

A medencében lévő víz térfogata:

$$V = \frac{m}{3} \cdot \left(T + \sqrt{T \cdot t} + t\right) = \frac{4}{3} \cdot \left(\frac{243\sqrt{3}}{2} + \sqrt{\frac{243\sqrt{3}}{2} \cdot \frac{363\sqrt{3}}{2}} + \frac{363\sqrt{3}}{2}\right) = 602\sqrt{3} \approx 1042{,}69 \text{ m}^3.$$

4416 Használjuk az ábra jelöléseit.

Az egyenes csonka gúla alaplapjának éle legyen a, fedőlapjának éle c, testmagassága m, oldallapjának magassága m_o.

Mivel a palást területének harmada az $ACC'A'$ trapéz területe:

$$3 \cdot \frac{m \cdot \left(a\sqrt{2} + c\sqrt{2}\right)}{2} = 4 \cdot \frac{m_o \cdot (a + c)}{2},$$

$$m = \frac{2\sqrt{2}}{3} \cdot m_o.$$



a) A csonka gúla A' csúcsának az $ABCD$ alaplapra eső merőleges vetülete legyen T, az AB alapélre eső merőleges vetülete pedig K.

A csonka gúla alaplapjának és az oldallapjának α hajlásszögét a KTA' derékszögű háromszögből meghatározhatjuk:

$$\sin\alpha = \frac{m}{m_o} = \frac{2\sqrt{2}}{3} \quad \Rightarrow \quad \alpha \approx 70{,}53°.$$

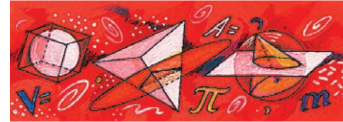
A csonka gúla alaplapjának és az oldallapjának hajlásszöge: 70,53°.

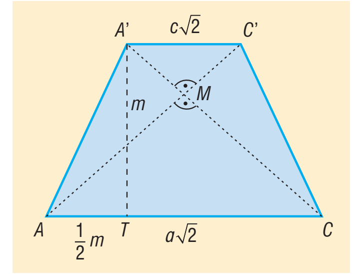
b) Az $A'TK$ derékszögű háromszögben Pitagorasz tételét felírva:

$$KT = \sqrt{m_o^2 - m^2} = \sqrt{\left(\frac{3}{2\sqrt{2}} \cdot m\right)^2 - m^2} = \frac{1}{2\sqrt{2}} \cdot m.$$

Mivel A' pont T merőleges vetülete rajta van az $ABCD$ négyzet átlóján, az AKT háromszög egyenlő szárú derékszögű háromszög:

$$AT = KT \cdot \sqrt{2} = \frac{1}{2\sqrt{2}} \cdot m \cdot \sqrt{2} = \frac{1}{2} m.$$





Tekintsük az átlós $ACC'A'$ húrtrapéz síkmetszetet.

Az $ACC'A'$ húrtrapéz AC alapján az AT szakasz hossza az alapok különbségének a fele:

$$AT = \frac{1}{2}m = \frac{a\sqrt{2} - c\sqrt{2}}{2}.$$

Mivel az átlók merőlegesek egymásra, az átlók M metszéspontja az A, C illetve az A', C' pontokkal egyenlő szárú derékszögű háromszöget határoz meg. A derékszögű háromszögek átfogóhoz tartozó magassága az átfogó fele, tehát a csonka gúla m magassága AC és $A'C'$ szakaszok összegének a fele:

$$m = \frac{a\sqrt{2} + c\sqrt{2}}{2}.$$

Használjuk fel, hogy a csonka gúla testmagassága 30 cm:

$$\left.\begin{aligned} 30 &= \frac{a\sqrt{2} + c\sqrt{2}}{2} \\ 15 &= \frac{a\sqrt{2} - c\sqrt{2}}{2} \end{aligned}\right\}.$$

Az egyenletrendszert megoldva:

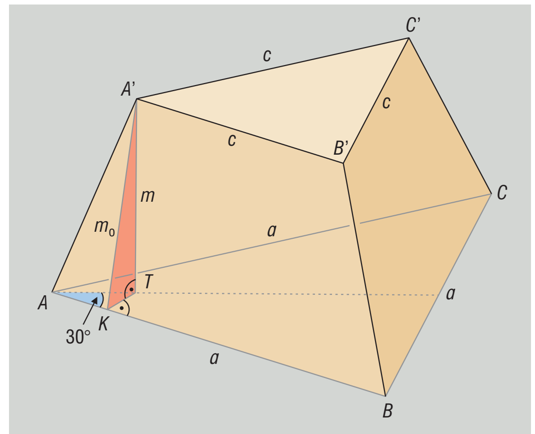
$$a = \frac{45\sqrt{2}}{2} \approx 31{,}82 \text{ cm} \quad \text{és} \quad c = \frac{15\sqrt{2}}{2} \approx 10{,}61 \text{ cm}.$$

A csonka gúla térfogata:

$$V = \frac{m}{3} \cdot \left(T + \sqrt{T \cdot t} + t\right) = \frac{m}{3} \cdot \left(a^2 + a \cdot c + c^2\right) =$$

$$= \frac{30}{3} \cdot \left(\left(\frac{45\sqrt{2}}{2}\right)^2 + \frac{45\sqrt{2}}{2} \cdot \frac{15\sqrt{2}}{2} + \left(\frac{15\sqrt{2}}{2}\right)^2\right) = 14\,625 \text{ cm}^3.$$

4417 A mellékelt ábra jelöléseit használva a csonka gúla ABC alaplapjának éle $a = 10$ cm, $A'B'C'$ fedőlapjának éle $c = 8$ cm. Az oldallap magassága legyen m_o, a testmagasság m.



a) Mivel egy oldallapjának területe az alaplap és fedőlap területének mértani közepe, felírható:

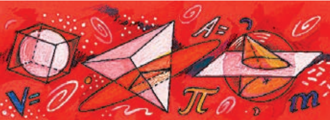
$$\frac{m_o \cdot (a + c)}{2} = \sqrt{\frac{a^2 \cdot \sqrt{3}}{4} \cdot \frac{c^2 \cdot \sqrt{3}}{4}},$$

$$\frac{m_o \cdot (a + c)}{2} = \frac{a \cdot c \cdot \sqrt{3}}{4},$$

$$m_o = \frac{a \cdot c \cdot \sqrt{3}}{2 \cdot (a + c)} = \frac{20\sqrt{3}}{9}.$$

A levélnehezék oldallapjának a magassága:

$$m_o = \frac{20\sqrt{3}}{9} \approx 3{,}85 \text{ cm}.$$



b) A csonka gúla térfogatának meghatározásához szükség van a test m magasságára. Az A' csúcs AB alapélre eső merőleges vetülete K. Az $ABB'A'$ húrtrapézból AK meghatározható:

$$AK = \frac{a-c}{2} = \frac{10-8}{2} = 1\text{ cm}.$$

Mivel az A' csúcsnak az alaplapra eső T merőleges vetülete rajta van a szabályos háromszög alaplapjának az A csúcsából kiinduló magasságán, az AKT derékszögű háromszög egy fél szabályos háromszög, vagyis:

$$KT = \frac{AK}{\sqrt{3}} = \frac{1}{\sqrt{3}} = \frac{\sqrt{3}}{3}\text{ cm}.$$

Írjuk fel Pitagorasz tételét a KTA' háromszögben. A csonka gúla testmagassága:

$$m = \sqrt{m_o^2 - KT^2} = \sqrt{\left(\frac{20\sqrt{3}}{9}\right)^2 - \left(\frac{1}{\sqrt{3}}\right)^2} = \frac{\sqrt{1173}}{9} \approx 3{,}81\text{ cm}.$$

A levélnehezék térfogata:

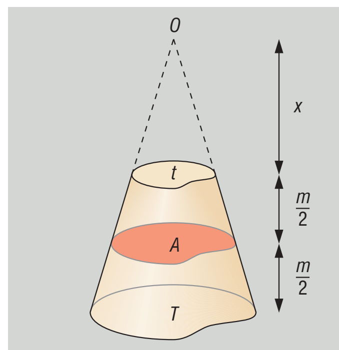
$$V = \frac{m}{3}\cdot\left(T + \sqrt{T\cdot t} + t\right) = \frac{\frac{\sqrt{1173}}{9}}{3}\cdot\left(\frac{10^2\cdot\sqrt{3}}{4} + \sqrt{\frac{10^2\cdot\sqrt{3}}{4}\cdot\frac{8^2\cdot\sqrt{3}}{4}} + \frac{8^2\cdot\sqrt{3}}{4}\right) =$$

$$= \frac{61}{9}\cdot\sqrt{391} \approx 134{,}02\text{ cm}^3 = 0{,}13402\text{ dm}^3.$$

A levélnehezék tömege:

$$m_{\text{nehezék}} = V\cdot\rho = 0{,}13402\cdot 8 \approx 1{,}07\text{ kg}.$$

4418 Jelölje O annak a kúpszerű testnek a csúcsát, amelyből a csonka kúpszerű testet származtattuk. A fedőlapnak O-tól vett távolsága legyen x. Ha a csonka kúpszerű test magassága m, akkor az alaplapnak O-tól vett távolsága $m + x$, a metsző síknak pedig ugyanezen ponttól vett távolsága $\frac{m}{2} + x$.



A csonka kúpszerű test alaplapjának területe legyen T, fedőlapjáé t, a síkmetszet területe A.

Az O pontra vonatkozó térbeli középpontos hasonlósággal a fent említett síkidomok egymásba vihetők. A területük aránya az O-tól vett távolságuk négyzetével egyenesen arányos, így felírható:

$$\frac{\sqrt{t}}{\sqrt{T}} = \frac{x}{x+m} \quad \text{és} \quad \frac{\sqrt{A}}{\sqrt{t}} = \frac{x + \frac{m}{2}}{x}.$$

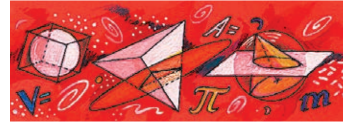
Az első egyenletből $x = \dfrac{\sqrt{t}\cdot m}{\sqrt{T} - \sqrt{t}}$, ezt a második egyenletbe behelyettesítve:

$$\sqrt{A} = \sqrt{t} + \sqrt{t}\cdot\frac{m}{2x} = \sqrt{t} + \sqrt{t}\cdot\frac{m}{2\cdot\frac{\sqrt{t}\cdot m}{\sqrt{T}-\sqrt{t}}} = \sqrt{t} + \frac{\sqrt{T}-\sqrt{t}}{2} = \frac{\sqrt{T}+\sqrt{t}}{2}.$$

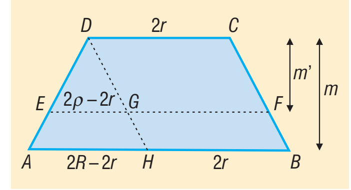
Tehát:

$$A = \left(\frac{\sqrt{T}+\sqrt{t}}{2}\right)^2 = \frac{T + t + 2\sqrt{T\cdot t}}{4} = \frac{\frac{T+t}{2} + \sqrt{T\cdot t}}{2},$$

amit bizonyítani kellett.



4419 A csonka kúp térfogatát felező kör síkmetszetnek a sugara legyen ρ, a csonka kúp magassága m, a felső csonka kúp magassága m'.



Tekintsük a csonka kúp alap-, illetve fedőköre középpontjára illeszkedő, az alaplap síkjára merőleges síkmetszetet. Ez trapéz alakú.

Az $ABCD$ trapéz alapjai $AB = 2R$, illetve $CD = 2r$. A csonka kúp alapokkal párhuzamos kör síkmetszetének átmérője a trapéz alapjaival párhuzamos $EF = 2\rho$ szakasz.

Húzzunk párhuzamost a D csúcson keresztül a CB szárral. Ez a párhuzamos AB oldalt H, az EF szakaszt G pontban metszi.

Az $AHD_\triangle$ és az $EGD_\triangle$ hasonló, mivel szögei páronként egyenlők. A hasonlóság aránya:

$$\frac{m'}{m} \quad \Rightarrow \quad \frac{m'}{m} = \frac{2\rho - 2r}{2R - 2r} = \frac{\rho - r}{R - r}.$$

A felső csonka kúp térfogata az egész csonka kúp térfogatának fele, tehát:

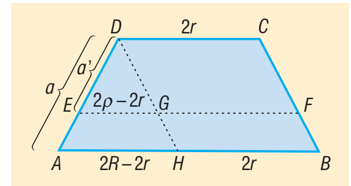
$$\frac{\frac{m' \cdot \pi}{3} \cdot \left(\rho^2 + \rho \cdot r + r^2\right)}{\frac{m \cdot \pi}{3} \cdot \left(R^2 + R \cdot r + r^2\right)} = \frac{1}{2}, \quad \text{amiből} \quad \frac{m'}{m} \cdot \frac{\left(\rho^2 + \rho \cdot r + r^2\right)}{\left(R^2 + R \cdot r + r^2\right)} = \frac{1}{2}.$$

Az utóbbi egyenletbe behelyettesítve az $\frac{m'}{m} = \frac{\rho - r}{R - r}$ arányt:

$$\frac{\rho - r}{R - r} \cdot \frac{\left(\rho^2 + \rho \cdot r + r^2\right)}{\left(R^2 + R \cdot r + r^2\right)} = \frac{1}{2} \quad \Rightarrow \quad \frac{\rho^3 - r^3}{R^3 - r^3} = \frac{1}{2} \quad \Rightarrow \quad \rho = \sqrt[3]{\frac{R^3 + r^3}{2}}.$$

A csonka kúp térfogatát felező sík körmetszetének a sugara: $\rho = \sqrt[3]{\frac{R^3 + r^3}{2}}$.

4420 Az egyenes csonka kúp palástjának területét felező kör síkmetszetnek a sugara legyen ρ, a csonka kúp alkotója a, és a felső csonka kúp alkotója a'.



A 4419. feladat megoldásához hasonlóan tekintsük a csonka kúp alap-, illetve fedőköre középpontjára illeszkedő, az alaplap síkjára merőleges $ABCD$ húrtrapéz síkmetszetet.

A már említett feladat megoldásában leírtak alapján az $AHD_\triangle$ és az $EGD_\triangle$ hasonló, mivel szögei páronként egyenlők. A hasonlóság aránya:

$$\frac{a'}{a} \quad \Rightarrow \quad \frac{a'}{a} = \frac{2\rho - 2r}{2R - 2r} = \frac{\rho - r}{R - r}.$$

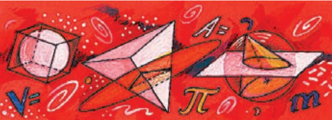
A felső csonka kúp palástjának területe feleakkora, mint az egész csonka kúp palástja, tehát:

$$\frac{a' \cdot (\rho + r) \cdot \pi}{a \cdot (R + r) \cdot \pi} = \frac{1}{2}.$$

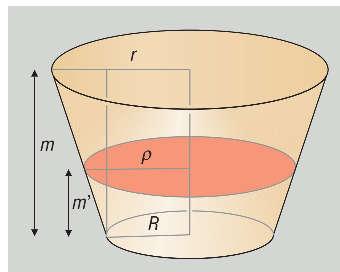
Az utóbbi egyenletbe behelyettesítve az $\frac{a'}{a} = \frac{\rho - r}{R - r}$ arányt:

$$\frac{\rho - r}{R - r} \cdot \frac{(\rho + r)}{(R + r)} = \frac{1}{2} \quad \Rightarrow \quad \frac{\rho^2 - r^2}{R^2 - r^2} = \frac{1}{2} \quad \Rightarrow \quad \rho = \sqrt{\frac{R^2 + r^2}{2}}.$$

A csonka kúp palástjának területét felező sík síkmetszetének a sugara: $\rho = \sqrt{\frac{R^2 + r^2}{2}}$.



4421 A tál alapkörének sugara $R = 10$ cm, a fedőkör sugara $r = 15$ cm, magassága $m = 9$ cm.



Az üvegtál térfogata:

$$V_{\text{tál}} = \frac{m \cdot \pi}{3} \cdot \left(R^2 + R \cdot r + r^2\right) = 1425\pi \approx 4476{,}77\ \text{cm}^3.$$

A tálban a tej m' cm magasan áll, és szintje ρ cm sugarú körlapot határoz meg. A tej térfogata:

$$V_{\text{tej}} = \frac{m' \cdot \pi}{3} \cdot \left(R^2 + R \cdot \rho + \rho^2\right) = 2000\ \text{cm}^3.$$

A két térfogat hányadosát felírva:

$$\frac{V_{\text{tej}}}{V_{\text{tál}}} = \frac{\frac{m' \cdot \pi}{3} \cdot \left(R^2 + R \cdot \rho + \rho^2\right)}{\frac{m \cdot \pi}{3} \cdot \left(R^2 + R \cdot r + r^2\right)}, \quad \text{amiből} \quad \frac{2000}{1425\pi} = \frac{m'}{m} \cdot \frac{\left(10^2 + 10\rho + \rho^2\right)}{\left(10^2 + 10 \cdot 15 + 15^2\right)}.$$

A 4419. feladat alapján:

$$\frac{m'}{m} = \frac{\rho - R}{r - R} = \frac{\rho - 10}{15 - 10}.$$

Behelyettesítve a kapott arányt:

$$\frac{2000}{1425\pi} = \frac{\rho - 10}{15 - 10} \cdot \frac{\left(10^2 + 10\rho + \rho^2\right)}{\left(10^2 + 10 \cdot 15 + 15^2\right)} = \frac{\rho^3 - 10^3}{15^3 - 10^3} \quad \Rightarrow \quad \rho = \sqrt[3]{\frac{4\,750\,000}{1425\pi} + 1000} \approx 12{,}73\ \text{cm}.$$

A két liter tej a tálban

$$m' = m \cdot \frac{\rho - R}{r - R} = 9 \cdot \frac{12{,}73 - 10}{15 - 10} \approx 4{,}91\ \text{cm}$$

magasan áll.

A gömb térfogata és felszíne – megoldások

4422 A gömb térfogata: $22\,449{,}30\ \text{cm}^3$.

4423 A gömb felszíne:
a) $165{,}39\ \text{cm}^2$; *b)* $605{,}21\ \text{cm}^2$.

4424 A gömb térfogata:
a) $3908{,}82\ \text{cm}^3$; *b)* $1486{,}91\ \text{cm}^3$.

4425 A gömb felszíne 9-szeresére, térfogata 27-szeresére nőtt, ha a sugarát háromszorosára növeltük.

4426 Az ejtőernyő $282{,}74\ \text{m}^2$ szövetből készült.

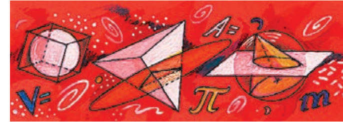
4427 A három gömb felszínének az összege $\frac{3}{\sqrt[3]{9}} \approx 1{,}44$-szorosa az eredeti gömb felszínének.

4428 Zoli zsebét húzza le jobban a benne levő üveggolyó.

4429 Az ágyúgolyó térfogata $82{,}30\ \text{cm}^3$-rel csökkent.

4430 A vízfelszín területe megközelítőleg $3{,}408 \cdot 10^8\ \text{km}^2$.

4431 A megtett távolság: $204{,}26$ km.



4432 *a)* A Vénusz sugara: 6051 km.

b) A Vénusz térfogata a Föld térfogatának 0,85-szorosa.

4433 A hengeres rész 3,43 m magas.

4434 A hidroglóbusz belső átmérőjének 8,74 m-nek kell lennie.

4435 A sík 24 cm távolságra halad a gömb középpontjától.

4436 *a)* A gömb térfogata: $\frac{500\pi}{3}$ cm^3, felszíne: 100π cm^2.

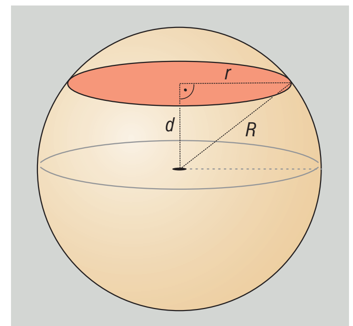
b) A gömb térfogata: 153 849,31 cm^3, felszíne: 13 885,06 cm^2.

4437 A két gömb sugara legyen R és $R+2$.
Felszíneik összege:
$$4\cdot R^2\cdot\pi+4\cdot(R+2)^2\cdot\pi=2060{,}88.$$
Az egyenletet rendezve az $R^2+2R-80=0$ másodfokú egyenlethez jutunk, amelynek megoldásai: $R_1=8$ és $R_2=-10$. Ez utóbbi nem lehet kör sugara.
A két gömb sugara 8 és 10 cm.

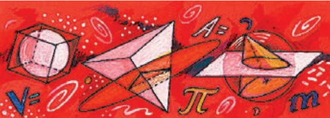
4438 A két gömb sugara legyen R és $R+2$.
Térfogataik különbsége:
$$\frac{4\cdot(R+2)^3\cdot\pi}{3}-\frac{4\cdot R^3\cdot\pi}{3}=4255{,}81.$$
Az egyenletet rendezve az $R^2+2R-168=0$ másodfokú egyenlethez jutunk, amelynek megoldásai: $R_1=12$ és $R_2=-14$. Utóbbi nem lehet kör sugara.
A két gömb sugara 12 cm és 14 cm.

4439 A téglatest csúcsai körül szerkesztett gömböknek a téglatest belsejébe eső részei együtt egy 3 cm sugarú gömböt adnak ki.
A megmaradt test térfogata:
$$V=a\cdot b\cdot c-\frac{4\cdot R^3\cdot\pi}{3}=8\cdot10\cdot12-\frac{4\cdot3^3\cdot\pi}{3}=960-36\pi\approx846{,}90\ \text{cm}^3.$$

4440 A gömb sugara legyen R, a síkmetszet sugara r. Keressük a gömb középpontjának a síktól való d távolságát.

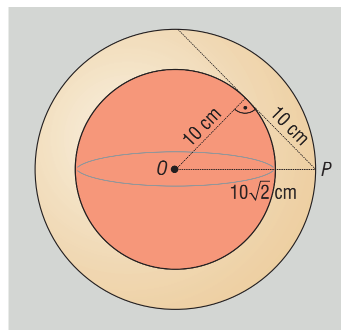


A gömb R sugarát a térfogatából meghatározhatjuk:
$$\frac{4\cdot R^3\cdot\pi}{3}=1000\quad\Rightarrow\quad R=\sqrt[3]{\frac{3000}{4\pi}}=\sqrt[3]{\frac{750}{\pi}}.$$
Az r sugarú kör területe fele a főgömb területének, tehát:
$$r^2\cdot\pi=\frac{1}{2}R^2\cdot\pi\quad\Rightarrow\quad r^2=\frac{1}{2}R^2.$$
Mivel R, r és d derékszögű háromszöget határoznak meg:
$$d^2=R^2-r^2=R^2-\frac{1}{2}R^2=\frac{1}{2}R^2=\frac{1}{2}\cdot\left(\sqrt[3]{\frac{750}{\pi}}\right)^2,\quad\text{amiből}\quad d=\frac{\sqrt{2}}{2}\cdot\sqrt[3]{\frac{750}{\pi}}\approx4{,}39.$$
A gömb középpontjától a sík 4,39 cm-re van.



4441 Tekintsük a 10 cm sugarú gömb főkörét egy ilyen tulajdonságú P ponttal.

A feladat feltétele alapján a P pontból a főkörhöz húzott érintőszakasz hossza 10 cm. A P pont a gömb középpontjával és az érintési ponttal egy 10 cm befogójú egyenlő szárú derékszögű háromszöget határoz meg. A háromszög átfogója $10\sqrt{2}$ cm, ami a P pontnak a gömb középpontjától vett távolsága.



A P pont rajta van az adott gömbbel koncentrikus $10\sqrt{2}$ cm sugarú gömbön.

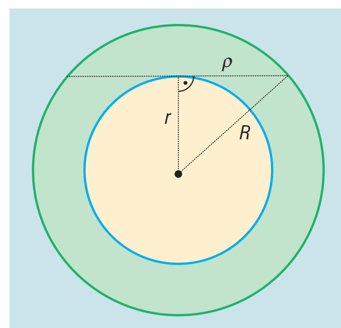
Hasonló megfontolásból ez utóbbi gömb minden pontjából 10 cm sugarú érintőszakasz húzható az eredeti gömbhöz.

Az adott tulajdonságú pontok halmaza a 10 cm sugarú gömbbel koncentrikus $10\sqrt{2}$ cm sugarú gömb.

4442 Legyen a nagyobb gömb sugara R, a kisebbé r. A kör síkmetszet sugara ρ.

A három sugár derékszögű háromszöget határoz meg, ezért:

$$\rho^2 = R^2 - r^2.$$



Annak a gömbnek a felszíne, amelyiknek a sugara ρ:

$$4 \cdot \rho^2 \cdot \pi = 4 \cdot \left(R^2 - r^2\right) \cdot \pi = 4 \cdot R^2 \cdot \pi - 4 \cdot r^2 \cdot \pi.$$

Ez éppen a bizonyítandó állítás.

4443 A külső gömb sugara 5 cm, a belső gömbé $4{,}4$ cm.

a) Az alumínium térfogatát megkapjuk, ha a külső gömb térfogatából kivonjuk a belső gömb térfogatát:

$$V = \frac{4 \cdot 5^3 \cdot \pi}{3} - \frac{4 \cdot (4{,}4)^3 \cdot \pi}{3} \approx 166{,}78\ \text{cm}^3.$$

Az üreges gömb tömege:

$$m = V \cdot \rho = 166{,}78 \cdot 2{,}7 \approx 450{,}31\ \text{g}.$$

b) A külső gömbfelszín a belsőnek

$$\frac{4 \cdot 5^2 \cdot \pi}{4 \cdot (4{,}4)^2 \cdot \pi} \cdot 100\% \approx 129{,}13\%\text{-a.}$$

A külső gömbfelszín $29{,}13\%$-kal nagyobb, mint a belső.

4444 Ha a tekegolyó tömege $2{,}8$ kg, akkor a térfogata:

$$V = \frac{m}{\rho} = \frac{2{,}8}{1{,}4} = 2\ \text{dm}^3.$$

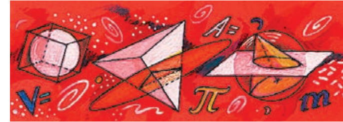
A golyó térfogatából R sugarára felírható:

$$\frac{4 \cdot R^3 \cdot \pi}{3} = 2 \quad \Rightarrow \quad R = \sqrt[3]{\frac{3}{2\pi}}\ \text{dm}.$$

A tekegolyó az $s = 16{,}5$ m $= 165$ dm hosszú pályán

$$n = \frac{s}{2 \cdot R \cdot \pi} = \frac{165}{2 \cdot \sqrt[3]{\frac{3}{2\pi}}\, \pi} \approx 33{,}60,$$

azaz közel 34-szer fordul meg.



4445 A szilvás gombócok sugara $R = 2$ cm, a fazék alapkörének sugara $r = 10$ cm, a fazék magassága $m = 28$ cm. A 20 darab szilvás gombóc térfogata:

$$V = 20 \cdot \frac{4 \cdot R^3 \cdot \pi}{3}.$$

Ha vízbe tesszük mind a húszat, és a fazékban levő víz szintje h cm-rel megemelkedik, akkor:

$$r^2 \cdot \pi \cdot h = 20 \cdot \frac{4 \cdot R^3 \cdot \pi}{3} \quad \Rightarrow \quad h = 20 \cdot \frac{4 \cdot R^3}{3 \cdot r^2} = 20 \cdot \frac{4 \cdot 2^3}{3 \cdot 10^2} \approx 2{,}13.$$

A fazekat $28 - 4 - 2{,}13 = 21{,}87$ cm magasan töltsük meg vízzel.

4446 Tekintsük az R sugarú gömbnek egy olyan főkörét, amelyik merőleges a metsző síkokra.

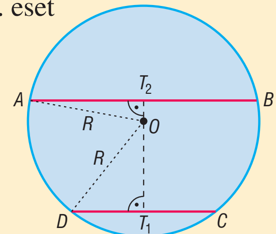
A síkoknak a főkörrel való közös pontjai az $AB = 2 \cdot 12$ cm és $DC = 2 \cdot 5$ cm párhuzamos húrok.

Bocsássunk merőlegeseket a kör O középpontjából a húrokra, ezeknek a talppontjai T_1 és T_2, amelyek távolsága 17 cm.

Írjuk fel Pitagorasz tételét az OAT_2 és ODT_1 derékszögű háromszögekben. Két eset lehetséges:

I. eset: Ha a kör középpontja a két húr között van:

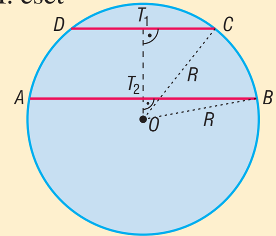
$$R^2 = 12^2 + T_2O^2,$$
$$R^2 = 5^2 + (17 - T_2O)^2.$$



A két egyenletet kivonva egymásból $T_2O = 5$, ezt valamelyik egyenletbe visszahelyettesítve $R = 13$ adódik.

II. eset: Ha a kör középpontja nincs a két húr között:

$$R^2 = 12^2 + T_2O^2,$$
$$R^2 = 5^2 + (17 + T_2O)^2.$$



A két egyenletet kivonva egymásból a T_2O távolságra -5-öt kapunk, ami nem lehetséges.

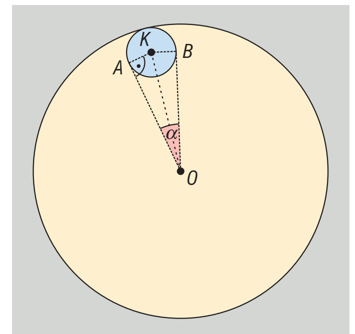
A gömb sugara tehát 13 cm.

A gömb térfogata:

$$V = \frac{4 \cdot R^3 \cdot \pi}{3} = \frac{8788\pi}{3} \approx 9202{,}77 \text{ cm}^3.$$

4447 *a)* Tekintsünk egy csapágygolyót, amely a csapágy külső gyűrűjét belülről érinti.

A középpontokat tartalmazó síkmetszeten O legyen a csapágygyűrű, K a csapágygolyó középpontja. Az O pontból a golyó főköréhez húzott érintők érintési pontjai A és B.



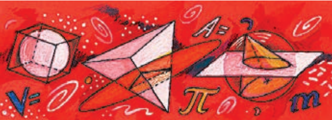
Az AOK derékszögű háromszögben:

$$OK = \frac{54}{2} - \frac{5}{2} = 24{,}5 \quad \text{és} \quad AK = \frac{5}{2} = 2{,}5.$$

Az O pontnál levő α középponti szög nagysága számolható:

$$\sin\frac{\alpha}{2} = \frac{2{,}5}{24{,}5} \quad \Rightarrow \quad \alpha \approx 11{,}71°.$$

Mivel $\frac{360°}{11{,}71°} \approx 30{,}74$, a teljes szög kisebb, mint 31α, de nagyobb, mint 30α, tehát a csapágyba elhelyezhető golyók száma legfeljebb 30.



b) A csapágygolyók térfogatainak összege:

$$V = 30\cdot\frac{4\cdot R^3\cdot\pi}{3} = 30\cdot\frac{4\cdot 2{,}5^3\cdot\pi}{3} \approx 1963{,}50\ \text{mm}^3 = 1{,}96\ \text{cm}^3.$$

A csapágygolyók tömegének az összege:

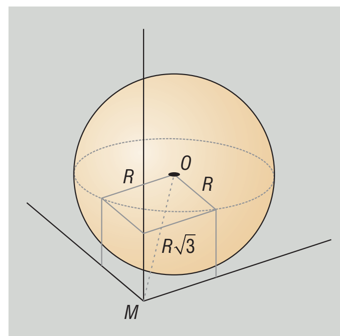
$$m = V\cdot\rho = 1{,}96\cdot 7{,}14 \approx 13{,}99\ \text{g}.$$

4448 A biliárdgolyó sugara $r = 26{,}2$ mm. A négy golyó középpontja egy $2r$ oldalú szabályos tetraédert határoz meg, amelynek magassága $2r\cdot\sqrt{\frac{2}{3}}$.

Az építmény magasságát úgy kaphatjuk meg, hogy a tetraéder magasságához még hozzáadjuk az alsó golyók középpontjának az asztal lapjától mért r távolságát, valamint a felső golyó középpontjának a golyó legmagasabb pontjától vett r távolságát. Az építmény magassága:

$$2r\cdot\left(\sqrt{\frac{2}{3}}+1\right) \approx 95{,}18\ \text{mm} \approx 9{,}52\ \text{cm}.$$

4449 Ha egy R sugarú gömb érint három egymásra merőleges síkot, akkor a gömb középpontjának a három síktól vett távolsága R. Tehát a gömb O középpontja egy R oldalélű kocka csúcsa, amelynek a síkok közös M pontjától vett távolsága a kocka átlójának a hossza, vagyis $OM = R\sqrt{3}$.



Ez alapján mind a teniszlabda, mind a golyó középpontja rajta van egy, a fiók sarkába képzeletben elhelyezett kocka testátlójának az egyenesén.

A teniszlabda középpontjának ezen az átlón a saroktól vett távolsága $\frac{7}{2}\cdot\sqrt{3}$, az r sugarú golyó középpontjának ugyanettől a ponttól vett távolsága $r\sqrt{3}$.

A golyó és a teniszlabda érintik egymást, tehát a középpontjaik távolsága a sugaraik hosszának az összege:

$$\frac{7}{2}\cdot\sqrt{3} - r\sqrt{3} = \frac{7}{2} + r \quad\Rightarrow\quad r = \frac{7}{2}\cdot\frac{\left(\sqrt{3}-1\right)}{\sqrt{3}+1} = \frac{7}{4}\cdot\left(\sqrt{3}-1\right)^2 \approx 0{,}94.$$

A golyó sugara 0,94 cm.

Egymásba írt testek (kiegészítő anyag) – megoldások

4450 *a)* A gömb felszíne: $144\pi \approx 452{,}39\ \text{cm}^2$.

b) A gömb térfogata: $288\pi \approx 904{,}78\ \text{cm}^3$.

4451 *a)* A gömb felszíne: $432\pi \approx 1357{,}17\ \text{cm}^2$.

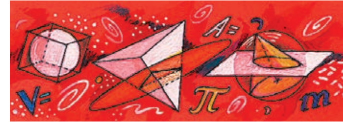
b) A gömb térfogata: $864\cdot\sqrt{3}\cdot\pi \approx 4701{,}37\ \text{cm}^3$.

4452 A téglatest éleinek hossza: 22,28 cm, 33,43 cm és 44,57 cm.

4453 A négyzetes oszlop térfogata: $87\,655{,}23\ \text{cm}^3$.

4454 A doboz palástjának a felszíne: $48\pi \approx 150{,}80\ \text{cm}^2$.

4455 A doboz felszíne: $608\ \text{cm}^2$.



4456 *a)* A kúp felszíne: $100\cdot\left(1+\sqrt{5}\right)\cdot\pi\approx1016{,}64\ \text{cm}^2$.

b) A kúp térfogata: $\dfrac{2000}{3}\pi\approx2094{,}40\ \text{cm}^3$.

4457 *a)* A gúla felszíne: $1440\ \text{cm}^2$.
b) A gúla térfogata: $1920\ \text{cm}^3$.

4458 *a)* A körkúp felszíne: $90\pi\approx282{,}74\ \text{cm}^2$.
b) A körkúp térfogata: $100\pi\approx314{,}16\ \text{cm}^3$.

4459 A hasáb magassága a beírt gömb átmérőjével egyenlő.

Mivel a beírt gömb érinti az oldallapokat, a gömb középpontján áthaladó, az alapokkal párhuzamos síkmetszet egy $24\ \text{cm}$ oldalú szabályos háromszög. A beírt gömb sugara ebbe a háromszögbe írható kör sugarával egyenlő.

A szabályos háromszög beírt körének sugara a háromszög magasságának a harmada:

$$r=\frac{1}{3}\cdot\frac{a\sqrt{3}}{2}=\frac{1}{3}\cdot\frac{24\sqrt{3}}{2}=4\sqrt{3}.$$

A hasáb magassága:

$$2r=8\sqrt{3}\approx13{,}86\ \text{cm}.$$

4460 A kockába írt gömb sugara a kocka élének a fele: $\dfrac{a}{2}$.

A kocka köré írt gömb sugara a kocka testátlójának a fele: $\dfrac{a\sqrt{3}}{2}$.

A kocka éleit érintő gömb sugara a lapátló hosszának a fele: $\dfrac{a\sqrt{2}}{2}$.

A három gömb hasonló egymáshoz, és hasonlóságuk aránya a sugaraik hosszának aránya.

a) Hasonló testek felszínének az aránya a hasonlóság arányának a négyzete, tehát a három gömb felszínének az aránya:

$$\left(\frac{a}{2}\right)^2:\left(\frac{a\sqrt{3}}{2}\right)^2:\left(\frac{a\sqrt{2}}{2}\right)^2=1:3:2.$$

b) Hasonló testek térfogatának az aránya a hasonlóság arányának a köbe, tehát a három gömb térfogatának az aránya:

$$\left(\frac{a}{2}\right)^3:\left(\frac{a\sqrt{3}}{2}\right)^3:\left(\frac{a\sqrt{2}}{2}\right)^3=1:\sqrt{3^3}:\sqrt{2^3}.$$

4461 A téglatest élei legyenek a, b és c hosszúságúak. Két lapjának a területe:

$$a\cdot b=48\quad\Rightarrow\quad b=\frac{48}{a}\qquad\text{és}\qquad a\cdot c=60\quad\Rightarrow\quad c=\frac{60}{a}.$$

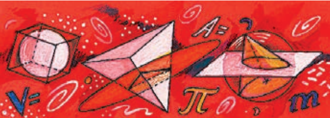
A téglatest köré írt gömb sugara a testátló fele, tehát:

$$5\sqrt{2}=\frac{\sqrt{a^2+b^2+c^2}}{2}\qquad\Rightarrow\qquad a^2+b^2+c^2=200.$$

Az egyenletbe b és c helyére az előző összefüggéseket helyettesítve:

$$a^2+b^2+c^2=200\quad\Rightarrow\quad a^2+\left(\frac{48}{a}\right)^2+\left(\frac{60}{a}\right)^2=200\quad\Rightarrow\quad a^4-200a^2+5904=0.$$

A kapott másodfokúra visszavezethető negyedfokú egyenletből a pozitív értékei: $a=6$ és $a=2\sqrt{41}$.

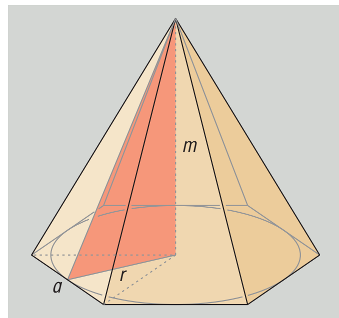


Az első esetben a téglatest éleinek hossza: 6 cm, 8 cm és 10 cm, a térfogata: 480 cm^3.

A második esetben a téglatest éleinek hossza: $2\sqrt{41}$ cm, $\frac{24\sqrt{41}}{41}$ cm és $\frac{30\sqrt{41}}{41}$ cm, a térfogata pedig $\frac{1440\sqrt{41}}{41}$ cm^3.

A téglatest térfogata lehet 480 cm^3 vagy $\frac{1440\sqrt{41}}{41} \approx 224,89$ cm^3.

4462 Legyen a szabályos hatszög alapú gúla alapéle a, magassága m.



A gúla térfogata:

$$V_{\text{gúla}} = \frac{T_{\text{hatszög}} \cdot m}{3} = \frac{6 \cdot \frac{a^2 \cdot \sqrt{3}}{4} \cdot m}{3} = \frac{a^2 \cdot \sqrt{3}}{2} \cdot m.$$

A gúlából csiszolható legnagyobb térfogatú kúp magassága a gúla m magasságával egyezik meg. A kúp alapkörének a sugara a szabályos hatszög beírt körének a sugara.

Egy a oldalú szabályos hatszög beírt körének a sugara egy a oldalú szabályos háromszög magassága: $r = \frac{a\sqrt{3}}{2}$.

A kúp térfogata:

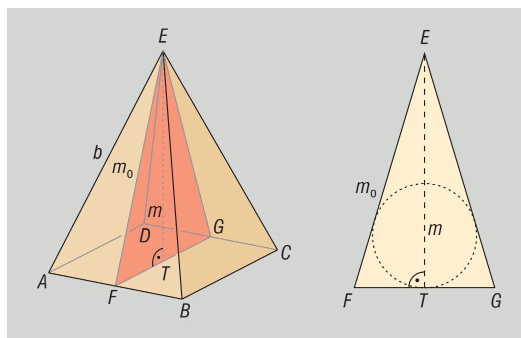
$$V_{\text{kúp}} = \frac{r^2 \cdot \pi \cdot m}{3} = \frac{\left(\frac{a\sqrt{3}}{2}\right)^2 \cdot \pi \cdot m}{3} = \frac{a^2 \cdot \pi \cdot m}{4}.$$

A kúp a gúla térfogatának

$$\frac{V_{\text{kúp}}}{V_{\text{gúla}}} = \frac{\frac{a^2 \cdot \pi \cdot m}{4}}{\frac{a^2 \cdot \sqrt{3}}{2} \cdot m} \cdot 100 = \frac{\pi}{2\sqrt{3}} \cdot 100 \approx 90,69\%\text{-a.}$$

A csiszoláskor keletkezett hulladék 9,31%.

4463 *a)* Vegyük a gúla alaplapjára merőleges, az alaplap középvonalát tartalmazó síkot.



Ez a sík a gúlából egy egyenlő szárú háromszöget, a beírt gömbből egy főkört metsz ki, amely a háromszög beírt köre.

A háromszög alapja $a = 12$ cm, magassága $m = 30$ cm, szára a gúla oldallapjának m_o magassága.

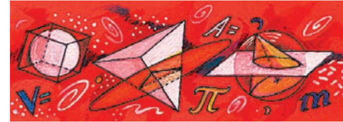
Az FTE derékszögű háromszögből:

$$m_o = \sqrt{m^2 + \left(\frac{a}{2}\right)^2} = \sqrt{936} = 6\sqrt{26}.$$

Jelölje a háromszög beírt körének sugarát r. A háromszög területét kétféleképpen felírva:

$$\frac{a \cdot m}{2} = r \cdot s = r \cdot \frac{a + 2 \cdot m_o}{2} \quad \Rightarrow \quad \frac{12 \cdot 30}{2} = r \cdot \frac{12 + 2 \cdot 6\sqrt{26}}{2} \quad \Rightarrow \quad r = \frac{30}{1 + \sqrt{26}}.$$

A gúlába írható gömb sugara: $r = \frac{30}{1 + \sqrt{26}} \approx 4,92$ cm.



b) Vegyük az alaplap átlóját tartalmazó, az alaplapra merőleges síkot.

Ez a sík a gúlából egy egyenlő szárú háromszöget, a körülírt gömbből pedig egy főkört metsz ki, amely az említett háromszög körülírt köre.

A háromszög alapja $a\sqrt{2} = 12\sqrt{2}$ cm, magassága $m = 30$ cm, és a szár hossza a gúla b oldalélének a hosszúsága.

Legyen a háromszög köré írt kör sugara R, középpontja O.

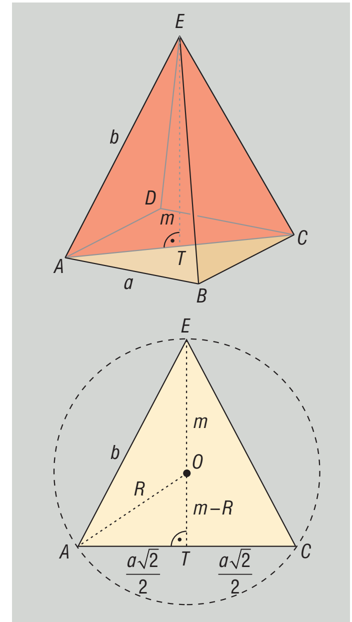
Az ábra jelöléseit használva az AOT derékszögű háromszög átfogója R, egyik befogója az alaplap átlójának a fele, másik befogója $m - R$.

A Pitagorasz-tétel alapján:

$$R^2 = (m - R)^2 + \left(\frac{a\sqrt{2}}{2}\right)^2 = (30 - R)^2 + \left(\frac{12\sqrt{2}}{2}\right)^2,$$

$$R = \frac{81}{5}.$$

A gúla köré írt gömb sugara $R = \frac{81}{5} = 16{,}2$ cm.



4464 *a)* A 4463. feladat *a)* részének megoldása alapján vegyük a gúla alaplapjára merőleges, az alaplap középvonalát tartalmazó síkot. A síkmetszet egy egyenlő oldalú háromszög, amelynek beírható köre a gúlába írható gömb főköre.

Mivel egy szabályos háromszög beírt körének a sugara a magasságának harmada, a beírt kör sugara 10 cm.

b) A gúla alapéle az *a)* részben említett szabályos háromszög oldala, amely a magasság hosszának ismeretében kiszámítható:

$$m = \frac{a\sqrt{3}}{2} \quad \Rightarrow \quad 30 = \frac{a\sqrt{3}}{2} \quad \Rightarrow \quad a = 20\sqrt{3}\ \text{cm}.$$

A 4463. feladat *b)* részének megoldása alapján a körülírt gömb R sugarára:

$$R^2 = (m - R)^2 + \left(\frac{a\sqrt{2}}{2}\right)^2 = (30 - R)^2 + \left(\frac{20\sqrt{3}\cdot\sqrt{2}}{2}\right)^2,$$

$$R = 25.$$

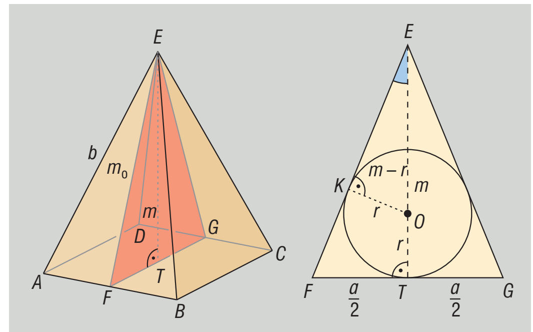
A gúla köré írt gömb sugara: $R = 25$ cm.

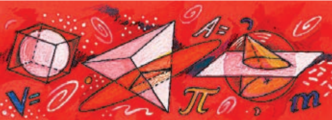
4465 Jelölje a gúla alapélét a, magasságát m, a beírt gömb sugarát r.

Vegyük a gúla alaplapjára merőleges, az alaplap középvonalát tartalmazó síkot.

Ez a sík a gúlából egy egyenlő szárú háromszöget, a beírt gömbből pedig egy főkört metsz ki, amely az említett háromszög beírt köre.

Az ábra jelöléseit használva az egyenlő szárú háromszög magassága $m = 32$ cm, alapja a, a beírt körének sugara $r = 8$ cm.





A háromszög szárának hossza:

$$FE = \sqrt{m^2 + \left(\frac{a}{2}\right)^2}.$$

A síkmetszetben az FTE derékszögű háromszög hasonló az OKE derékszögű háromszöghöz, mivel FET hegyesszögük közös. A háromszögek megfelelő oldalainak aránya egyenlő:

$$\frac{FE}{OE} = \frac{FT}{OK} \quad \Rightarrow \quad \frac{\sqrt{m^2 + \left(\frac{a}{2}\right)^2}}{m - r} = \frac{\frac{a}{2}}{r},$$

amiből kapjuk, hogy:

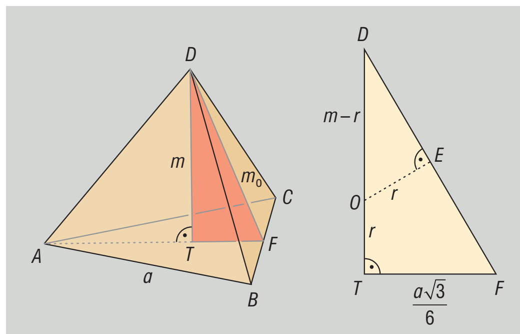
$$\frac{\sqrt{32^2 + \left(\frac{a}{2}\right)^2}}{32 - 8} = \frac{\frac{a}{2}}{8} \quad \Rightarrow \quad a = 16\sqrt{2}.$$

A gúla térfogata:

$$V = \frac{T \cdot m}{3} = \frac{a^2 \cdot m}{3} = \frac{(16\sqrt{2})^2 \cdot 32}{3} = \frac{16384}{3} \approx 5461,33 \text{ cm}^3.$$

4466 Vegyük a gúla alaplapjára merőleges, az alaplap magasságát tartalmazó síkot. A gúla alapéle legyen a, magassága m.

a) A gúlába írt r sugarú gömb O középpontja rajta van a gúla magasságán, és az alaplapot a gúla magasságának talppontjában, az oldallapokat az oldallapok magasságain érinti.



Az ábra jelöléseit használva tekintsük az FTD derékszögű háromszöget. A háromszög T csúcsa az a oldalú szabályos háromszög súlypontja. A súlypont harmadolja a súlyvonalat, amely (szabályos háromszögről lévén szó) a magasság is egyben, tehát:

$$TF = \frac{a\sqrt{3}}{2} \cdot \frac{1}{3} = \frac{18\sqrt{3}}{6} = 3\sqrt{3}.$$

A beírt gömb középpontja minden oldallaptól r távolságra van, tehát $OE = r$ és $OT = r$, ezért $OD = m - r$.

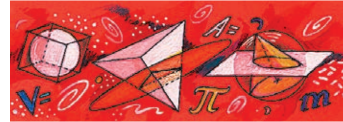
A háromszög FD átfogója a Pitagorasz-tétel alapján:

$$FD = \sqrt{m^2 + TF^2} = \sqrt{20^2 + (3\sqrt{3})^2} = \sqrt{427}.$$

Az FTD derékszögű háromszög hasonló az OED derékszögű háromszöghöz, mivel FDT hegyesszögük közös. A háromszögek megfelelő oldalai hosszának aránya egyenlő:

$$\frac{TF}{OE} = \frac{FD}{OD} \quad \Rightarrow \quad \frac{3\sqrt{3}}{r} = \frac{\sqrt{427}}{20 - r} \quad \Rightarrow \quad r = \frac{60\sqrt{3}}{3\sqrt{3} + \sqrt{427}}.$$

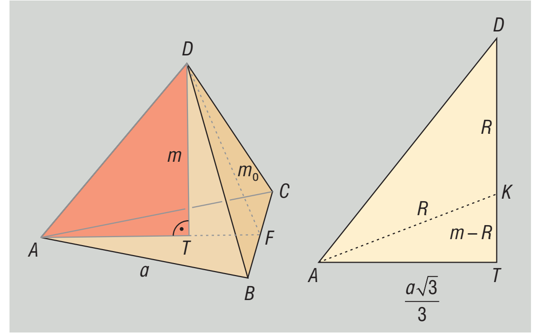
A gúlába írható gömb sugara: $r = \dfrac{60\sqrt{3}}{3\sqrt{3} + \sqrt{427}} \approx 4,02$ cm.



b) A gúla köré írt R sugarú gömb K középpontja rajta van a gúla magasságán.

Az ábra jelöléseit használva tekintsük az ATD derékszögű háromszöget. A háromszög T csúcsa az a oldalú szabályos háromszög súlypontja. A súlypont harmadolja a súlyvonalat, amely (szabályos háromszögről lévén szó) a magasság is egyben, tehát:

$$AT = \frac{a\sqrt{3}}{2} \cdot \frac{2}{3} = \frac{a\sqrt{3}}{3} = 6\sqrt{3}.$$

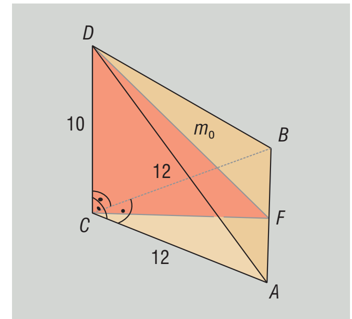


A gömb K középpontja a gúla minden csúcsától R távolságra van, tehát $AK = R$ és $KD = R$, ezért $KT = m - R$. Az AKT derékszögű háromszögben a Pitagorasz-tétel alapján:

$$R^2 = (m - R)^2 + AT^2 = (20 - R)^2 + \left(6\sqrt{3}\right)^2 \quad \Rightarrow \quad R = \frac{508}{40}.$$

A gúla köré írt gömb sugara: $R = \frac{508}{40} = 12{,}7$ cm.

4467 Ismert, hogy ha egy poliéderbe gömb írható, akkor a gömb r sugara a poliéder térfogatának és felszínének ismeretében kiszámítható: $r = \frac{3 \cdot V}{A}$.



Mivel tetraéderbe írható gömb, elég a tetraéder térfogatát és felszínét kiszámítani.

A tetraéder ABC alaplapjának területe:

$$T_{ABC} = \frac{12^2}{2} = 72 \text{ cm}^2,$$

a tetraéder magassága $m = 10$ cm, így a tetraéder térfogata:

$$V = \frac{T_{ABC} \cdot m}{3} = \frac{72 \cdot 10}{3} = 240 \text{ cm}^3.$$

Az ADC és BDC derékszögű háromszögek területe a befogók szorzatának fele, ezért:

$$T_{ADC} = T_{BDC} = \frac{10 \cdot 12}{2} = 60 \text{ cm}^2.$$

Az $ABD_\triangle$-ben a szimmetria miatt: $AF = BF = 6\sqrt{2}$ cm.

Az alaphoz tartozó m_o magasság Pitagorasz tétele alapján: $m_o = \sqrt{172} = 2\sqrt{43}$ cm.

Az $ABD_\triangle$ területe:

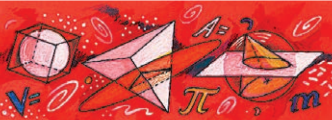
$$T_{ABD} = \frac{12\sqrt{2} \cdot 2\sqrt{43}}{2} = 12\sqrt{86} \text{ cm}^2.$$

A gúla felszíne:

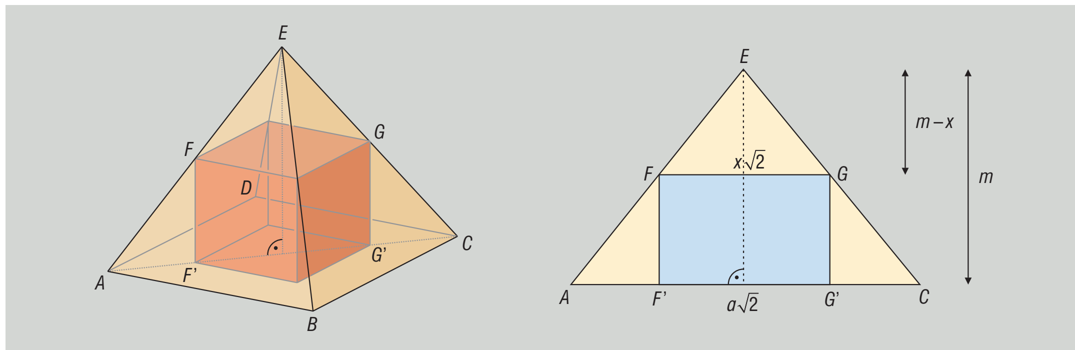
$$A = T_{ABC} + 2 \cdot T_{ACD} + T_{ABD} = 72 + 2 \cdot 60 + 12\sqrt{86} = 192 + 12\sqrt{86} \text{ cm}^2.$$

A gúlába írható gömb sugara:

$$r = \frac{3 \cdot V}{A} = \frac{3 \cdot 240}{192 + 12\sqrt{86}} = \frac{3 \cdot 20}{16 + \sqrt{86}} \approx 2{,}37 \text{ cm}.$$



4468 A gúla alapéle legyen a, magassága m hosszúságú. Használjuk az ábrák jelöléseit.



a) Vegyük a gúla ACE egyenlő szárú háromszög síkmetszetét. A háromszög alapja a gúla alaplapjának az átlója, vagyis $a\sqrt{2}$ hosszúságú. A háromszög magassága a gúla m magassága. Az oldalél és az alaplap EAC szögére felírhatjuk:

$$\operatorname{tg} EAC\sphericalangle = \frac{m}{\frac{a\sqrt{2}}{2}} \quad \Rightarrow \quad \operatorname{tg} EAC\sphericalangle = \frac{10}{\frac{15\sqrt{2}}{2}} \quad \Rightarrow \quad EAC\sphericalangle \approx 43{,}31^\circ.$$

A gúla oldalélének az alaplappal bezárt szöge $43{,}31^\circ$.

b) A gúlába írt kocka élének hossza legyen x.

Ismét vegyük a gúla ACE egyenlő szárú háromszög síkmetszetét. A kockából ez a síkmetszet egy olyan $FGG'F'$ téglalapot metsz ki, amelyiknek az $FG = x\sqrt{2}$ hosszúságú oldala párhuzamos az $ACE_\triangle$ AC alapjával.

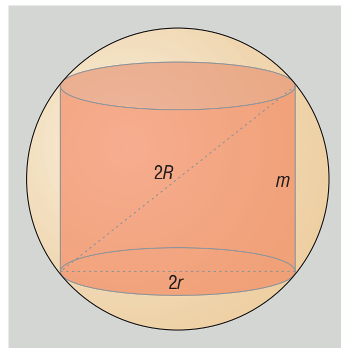
Az $ACE_\triangle$ és az $FGE_\triangle$ hasonló, mivel szögeik páronként egyenlők.

Felírhatjuk a két háromszögben, hogy az alapok hosszának aránya egyenlő a magasságok hosszának arányával:

$$\frac{m-x}{m} = \frac{x\sqrt{2}}{a\sqrt{2}} \quad \Rightarrow \quad \frac{10-x}{10} = \frac{x}{15} \quad \Rightarrow \quad x = 6.$$

A gúlába írt kocka éle 6 cm.

4469 Az R sugarú gömbbe írt henger alapkörének sugara legyen r, magassága m.



A feltétel szerint a henger palástjának területe kétszerese az alaplap területének, tehát:

$$2 \cdot r^2 \cdot \pi = 2r \cdot \pi \cdot m \quad \Rightarrow \quad r = m.$$

Vegyük a henger tengelymetszetét. Ez a tengelymetszet egy téglalap, amelynek egyik oldala $2r$, a másik m hosszúságú, és a téglalap átlója kétszer akkora, mint a gömb R sugara.

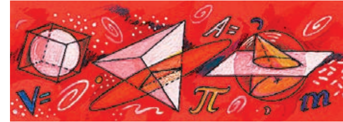
A Pitagorasz-tételt felírva:

$$(2R)^2 = (2r)^2 + m^2,$$
$$(2 \cdot 10)^2 = (2r)^2 + r^2,$$
$$r = 4\sqrt{5}.$$

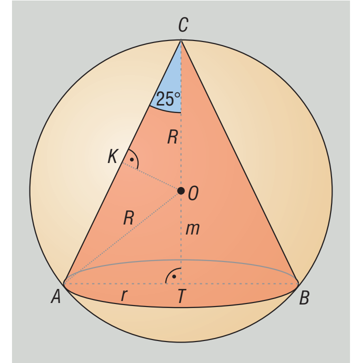
A henger alapkörének sugara és magassága: $r = m = 4\sqrt{5}$ cm.

A henger térfogata:

$$V = r^2 \cdot \pi \cdot m = \left(4\sqrt{5}\right)^2 \cdot \pi \cdot 4\sqrt{5} = 320\sqrt{5} \cdot \pi \approx 2247{,}94 \text{ cm}^3.$$



4470 Mivel a gömb felszíne $400\pi\ \text{cm}^2$, a gömb R sugara 10 cm.



Az ábra jelöléseit használva azt látjuk, hogy az $ABC_\triangle$ köré írható körének sugara R, középpontja O, valamint a háromszög szárszöge 50º. Az O középpontból az AC szárra bocsátott merőleges talppontja K.

Az OKC derékszögű háromszögből kifejezhető a kúp alkotójának hossza:

$$\cos 25° = \frac{\frac{AC}{2}}{R} \quad \Rightarrow \quad a = AC = 2R \cdot \cos 25° \approx 18{,}13 \text{ cm}.$$

Az ATC derékszögű háromszögben:

$$\cos 25° = \frac{CT}{AC} = \frac{CT}{2R \cdot \cos 25°},$$

amiből megkaphatjuk a kúp m magasságát:

$$m = CT = 2R \cdot \cos^2 25° \approx 16{,}43 \text{ cm}.$$

Az ATC derékszögű háromszög

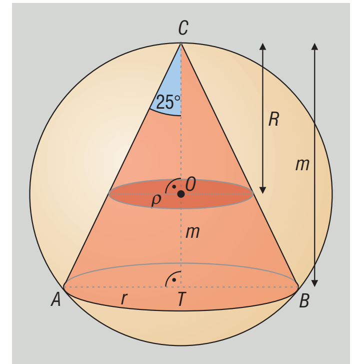
$$\frac{AT}{AC} = \sin 25° \quad \Rightarrow \quad AT = AC \cdot \sin 25°,$$

amiből a kúp alapkörének r sugara:

$$r = AT = 2R \cdot \cos 25° \cdot \sin 25° \approx 7{,}66 \text{ cm}.$$

a) A kúp felszíne:

$$A = r \cdot \pi \cdot (r + a) \approx 7{,}66\pi \cdot (7{,}66 + 18{,}13) \approx 620{,}63 \text{ cm}^2.$$



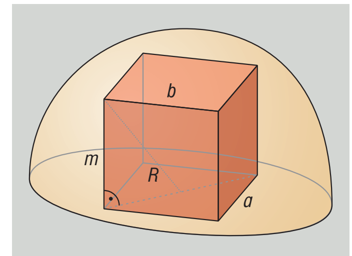
b) A gömb középpontján áthaladó, a kúp alaplapjával párhuzamos sík a kúpból az eredetihez hasonló kúpot metsz le. Legyen a hasonló kúp alapkörének sugara ρ. A hasonló kúpok magasságainak és az alapkörök sugarának a hosszára felírható:

$$\frac{\rho}{r} = \frac{R}{m} \quad \Rightarrow \quad \rho = \frac{r \cdot R}{m} \quad \Rightarrow \quad \rho \approx \frac{7{,}66 \cdot 10}{16{,}43} \approx 4{,}66.$$

A sík által a kúpból kimetszett kör területe:

$$T = \rho^2 \cdot \pi \approx 4{,}66^2 \cdot \pi \approx 68{,}22 \text{ cm}^2.$$

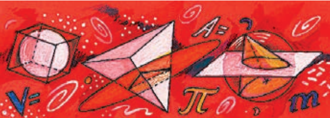
4471 A félgömb alakú üvegfedő középpontja az $a = 8$ cm és $b = 10$ cm oldalú téglalap átlóinak metszéspontja. Ha a sajt legnagyobb m magasságát keressük, akkor a téglalap átlójának a fele és az m magasság egy olyan derékszögű háromszög befogói, amelynek átfogója a gömb $R = 15$ cm hosszú sugara. A Pitagorasz-tétel alapján:



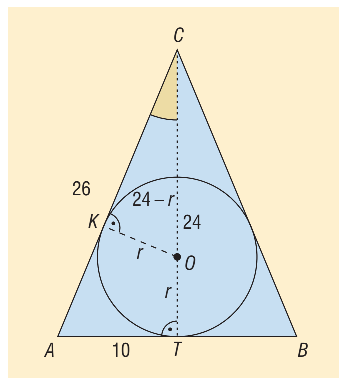
$$R^2 = \left(\frac{\sqrt{a^2 + b^2}}{2}\right)^2 + m^2 \quad \Rightarrow \quad 15^2 = \left(\frac{\sqrt{8^2 + 10^2}}{2}\right)^2 + m^2,$$

amiből a magasságra kapjuk, hogy $m = 2\sqrt{46}$.

A sajt magassága legfeljebb $2\sqrt{46} \approx 13{,}56$ cm lehet.



4472 A pontszerű fényforrás és a golyó kör alakú árnyéka egy olyan forgáskúpot határoz meg, amelybe a golyó sugarával azonos sugarú gömb írható.



Vegyük a kúp ábrán látható tengelymetszetét.

A tengelymetszet olyan egyenlő szárú háromszög, amelynek magassága $CT = 24$ cm, alapja $AB = 2 \cdot 10 = 20$ cm, a beírt körének sugara r. A háromszög szárának hossza:

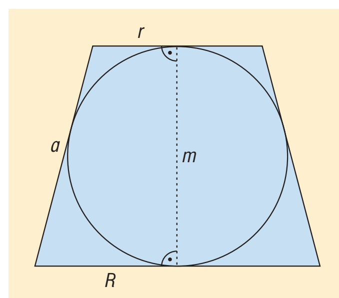
$$AC = \sqrt{CT^2 + \left(\frac{AB}{2}\right)^2} = \sqrt{24^2 + 10^2} = 26 \text{ cm}.$$

A síkmetszetben az ATC derékszögű háromszög hasonló az OKC derékszögű háromszöghöz, mivel ACT hegyesszögük közös. A háromszögek megfelelő oldalainak aránya egyenlő:

$$\frac{AC}{OC} = \frac{AT}{OK} \quad \Rightarrow \quad \frac{26}{24-r} = \frac{10}{r} \quad \Rightarrow \quad r = \frac{20}{3}.$$

A golyó átmérője $2r = \frac{40}{3} \approx 13{,}33$ cm.

4473 Legyen a csonka kúp alapkörének sugara R, fedőkörének sugara r, alkotója a, magassága m.



A csonka kúp tengelymetszete egy húrtrapéz, amely egyben érintőnégyszög is. A húrtrapéz alapjai $2R$, illetve $2r$ hosszúságúak. A trapéz magassága, ami a csonka kúp magassága is, a beírható kör sugarának a kétszeresével egyenlő: $m = 2\rho$. A húrtrapéz szárai a csonka kúp alkotói.

Az érintőnégyszögek tétele alapján:

$$2a = 2R + 2r \quad \Rightarrow \quad a = R + r.$$

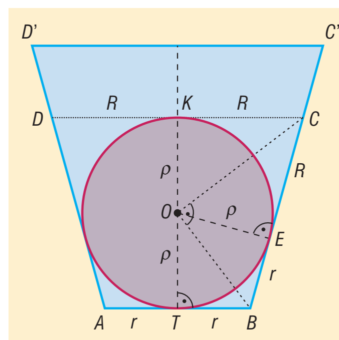
Írjuk fel a csonka kúp felszínének és térfogatának a hányadosát:

$$\frac{A}{V} = \frac{\pi \cdot \left(R^2 + r^2 + a \cdot (R+r)\right)}{\frac{m \cdot \pi}{3} \cdot \left(R^2 + R \cdot r + r^2\right)} = \frac{3 \cdot \left(R^2 + r^2 + (R+r) \cdot (R+r)\right)}{2\rho \cdot \left(R^2 + R \cdot r + r^2\right)} =$$

$$= \frac{3 \cdot (2 \cdot R^2 + 2 \cdot r^2 + 2 \cdot R \cdot r)}{2\rho \cdot \left(R^2 + R \cdot r + r^2\right)} = \frac{3}{\rho}.$$

A csonka kúp felszínének és térfogatának hányadosa $\frac{3}{\rho}$.

4474 A vödör alapkörének sugara $r = 5$ cm, fedőkörének sugara $R' = 8$ cm, magassága m.

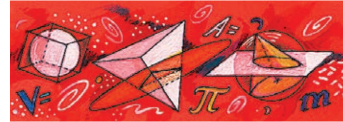


Vegyünk egy olyan síkot, amely metszi a vödröt, párhuzamos az alaplappal, és érinti a vödörbe tett labdát.

Ennek a síknak a vödörrel vett síkmetszete egy R sugarú kör.

Tekintsük a vödör ábrán látható $ABC'D'$ húrtrapéz alakú tengelymetszetét.

Az ábrán látható $ABCD$ húrtrapéz egyben érintőtrapéz is. A beírt kör sugara $\rho = 6$ cm, az alapok hossza $2r$, illetve $2R$, magassága pedig 2ρ.



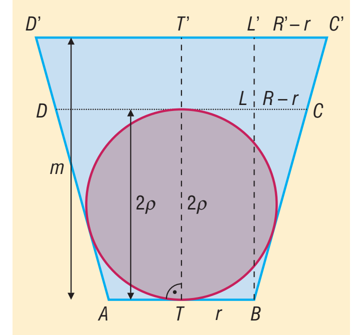
A beírt kör O középpontja a húrtrapéz B és C csúcsoknál levő szögek felezőinek metszéspontja. Ez a két szögfelező, mivel a trapéz egy száron nyugvó szögeinek összege 180°, derékszöget zár be.

A külső pontból egy körhöz húzott érintőszakaszok hosszának egyenlősége alapján $KC = CE = R$, illetve $TB = BE = r$.

Az OBC derékszögű háromszögben az átfogóhoz tartozó magasság $OE = \rho$, amely a BC átfogón R és r hosszúságú szeleteket hoz létre. A magasságtétel alapján:

$$\rho = \sqrt{R \cdot r} \quad \Rightarrow \quad R = \frac{\rho^2}{r} \quad \Rightarrow \quad R = \frac{6^2}{5} = \frac{36}{5}.$$

A vödör m magasságának kiszámításához az $ABC'D'$ tengelymetszet B csúcsán keresztül állítsunk merőlegest a trapéz alapjára. Az így létrejött $BLC_\triangle$ és $BL'C'_\triangle$ hasonló, mivel szögeik páronként egyenlők. A két háromszög megfelelő oldalai hosszának aránya egyenlő:



$$\frac{m}{2\rho} = \frac{R' - r}{R - r} \quad \Rightarrow \quad m = 2\rho \cdot \frac{R' - r}{R - r} = 2 \cdot 6 \cdot \frac{8 - 5}{\frac{36}{5} - 5} = \frac{180}{11}.$$

A vödör magassága: $m = \dfrac{180}{11} \approx 16{,}36$ cm.

4475 A kúp alapkörének sugara legyen r, magassága m, alkotója a, a beírt gömb sugara R.

A feladat feltétele szerint:

$$A_{\text{kúp}} = 2 \cdot A_{\text{gömb}} \quad \Rightarrow \quad r \cdot \pi \cdot (r + a) = 2 \cdot 4 \cdot R^2 \cdot \pi \quad \Rightarrow \quad r \cdot (r + a) = 8 \cdot R^2.$$

Tekintsük a kúp tengelymetszetét.

A tengelymetszet egy olyan egyenlő szárú háromszög, amelynek alapja $2r$, magassága m, szárainak hossza a, és a háromszögbe írt kör sugara R.

Számítsuk ki a háromszög területét kétféleképpen:

$$\frac{2 \cdot r \cdot m}{2} = R \cdot \frac{2 \cdot a + 2 \cdot r}{2} \quad \Rightarrow \quad R = \frac{r \cdot m}{a + r}.$$

Ezt beírva az $r \cdot (r + a) = 8 \cdot R^2$ összefüggésbe:

$$r \cdot (r + a) = 8 \cdot \left(\frac{r \cdot m}{a + r}\right)^2 \quad \Rightarrow \quad r + a = 8 \cdot \frac{r \cdot m^2}{(r + a)^2}.$$

Mivel $m^2 = a^2 - r^2$:

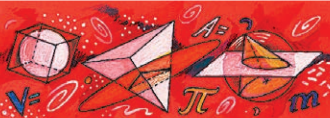
$$r + a = 8 \cdot \frac{r \cdot (a^2 - r^2)}{(r + a)^2} = 8 \cdot \frac{r \cdot (a + r) \cdot (a - r)}{(r + a)^2},$$

amiből kapjuk:

$$(r + a)^2 = 8 \cdot r \cdot (a - r),$$
$$9 \cdot r^2 - 6 \cdot r \cdot a + a^2 = 0,$$
$$(3 \cdot r - a)^2 = 0.$$

Ez utóbbi egyenlőség pontosan akkor teljesül, ha az alkotó hossza a sugár háromszorosa, vagyis a fél nyílásszög szinusza $\frac{1}{3}$. Mivel ez a szög csak hegyesszög lehet, a fél nyílásszög 19,47°.

A kúp nyílásszöge 38,94°.



4476 A kúp alapkörének sugara legyen r, magassága m, alkotója a, a beírt gömb sugara R.
A 4475. feladat megoldása alapján:

$$m = \frac{(a+r)\cdot R}{r}.$$

A gömb és a kúp térfogatának aránya:

$$\frac{V_{\text{gömb}}}{V_{\text{kúp}}} = \frac{\dfrac{4\cdot R^3\cdot\pi}{3}}{\dfrac{r^2\cdot\pi\cdot m}{3}} = \frac{4\cdot R^3}{r^2\cdot m} = \frac{4\cdot R^3}{r^2\cdot\dfrac{R\cdot(a+r)}{r}} = \frac{4\cdot R^2}{r\cdot(a+r)}.$$

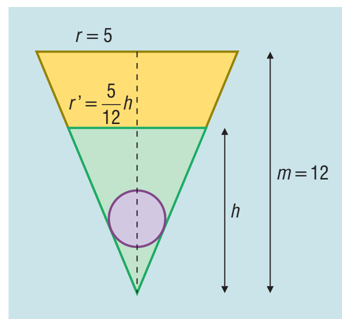
A gömb és a kúp felszínének aránya:

$$\frac{A_{\text{gömb}}}{A_{\text{kúp}}} = \frac{4\cdot R^2\cdot\pi}{r\cdot\pi\cdot(a+r)} = \frac{4\cdot R^2}{r\cdot(a+r)}.$$

Ez alapján egy tetszőleges forgáskúpba írt gömb térfogatának és a kúp térfogatának aránya egyenlő a gömb felszínének és a kúp felszínének az arányával.
A gömb felszíne a kúp felszínének harmada.

4477 A pohár egy $m = 12$ cm magasságú, $a = 13$ cm alkotójú kúp. A kúp alapkörének sugara:

$$r = \sqrt{a^2 - m^2} = \sqrt{13^2 - 12^2} = 5.$$



A pohár térfogata:

$$V_{\text{pohár}} = \frac{r^2\cdot\pi\cdot m}{3} = \frac{5^2\cdot\pi\cdot 12}{3} = 100\pi.$$

A pohárban levő koktél térfogatát egy, a pohárhoz hasonló kúp térfogata adja meg. A hasonlóság aránya a kúpok magasságainak aránya: $\lambda = \frac{7{,}5}{12} = \frac{5}{8}$.

Hasonló testek térfogatának aránya a hasonlóság arányának a köbe:

$$\frac{V_{\text{koktél}}}{V_{\text{pohár}}} = \lambda^3 \quad\Rightarrow\quad V_{\text{koktél}} = \lambda^3\cdot V_{\text{pohár}} = \left(\frac{5}{8}\right)^3\cdot 100\pi = \frac{3125}{128}\pi.$$

A pohár által meghatározott kúpba írható gömb sugarát a 4475. feladat alapján az $R = \frac{r\cdot m}{a+r}$ összefüggéssel számolhatjuk:

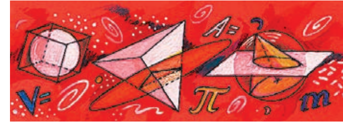
$$R = \frac{5\cdot 12}{13+5} = \frac{10}{3}\ \text{cm}.$$

A koktél kúpjába írható gömb sugara:

$$\lambda\cdot R = \frac{5}{8}\cdot\frac{10}{3} = \frac{50}{24} > 1\ \text{cm},$$

tehát a beletett 2 cm átmérőjű ringlót a koktél teljesen ellepi.
A ringlószilva térfogata:

$$V_{\text{szilva}} = \frac{4\cdot 1^3\cdot\pi}{3} = \frac{4\pi}{3}.$$



Ha a pohárba beletesszük a szilvát, akkor a pohárban levő koktél a szilvával együtt egy h magasságú kúpot alkot. A kúp alapkörének sugara legyen r'. Ez a kúp hasonló a pohár kúpjához, tehát megfelelő adatai hosszának hányadosára egyenlő:

$$\frac{r'}{h} = \frac{r}{m} \quad \Rightarrow \quad r' = h \cdot \frac{r}{m} = h \cdot \frac{5}{12}.$$

A h magasság kiszámítása:

$$V_{\text{koktél}} + V_{\text{szilva}} = \frac{(r')^2 \cdot \pi \cdot h}{3},$$

$$\frac{3125}{128}\pi + \frac{4\pi}{3} = \frac{\left(\frac{5}{12}h\right)^2 \cdot \pi \cdot h}{3},$$

$$h \approx 7{,}63.$$

A pohárban a koktél szintjének emelkedése:

$$h - 7{,}5 = 7{,}63 - 7{,}5 = 0{,}13 \text{ cm} = 1{,}3 \text{ mm}.$$

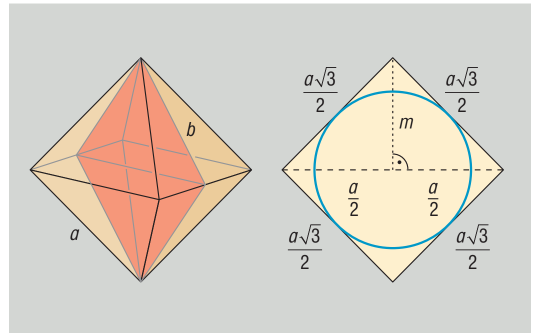
4478 Jelölje az oktaéder élének hosszúságát a, $a = 30$ cm.

a) Vegyük az oktaéder két szemközti párhuzamos élének felezőpontján áthaladó, ezen élekre merőleges síkmetszetét.

A rombusz alakú síkmetszet tartalmazza a beírt gömb középpontját, és a gömb főköre érinti a rombusz oldalait.

A rombusz oldalának hossza az a oldalú szabályos háromszög magassága:

$$b = \frac{a\sqrt{3}}{2} = 15\sqrt{3}.$$



A rombusz egyik átlója az oktaéder a élével egyenlő hosszú.

Keressük a rombuszba írt kör sugarának r hosszát.

A rombusz területét egyrészt felírhatjuk r segítségével:

$$T_{\text{rombusz}} = r \cdot \frac{k}{2} = r \cdot \frac{4b}{2} = 2r \cdot \frac{a\sqrt{3}}{2} = r \cdot a\sqrt{3} = 30\sqrt{3} \cdot r.$$

Másrészt a rombusz területe egyenlő két a alapú és b szárú egyenlő szárú háromszög területével. A háromszög alaphoz tartozó magassága:

$$m = \sqrt{b^2 - \left(\frac{a}{2}\right)^2} = \sqrt{\left(15\sqrt{3}\right)^2 - 15^2} = 15\sqrt{2},$$

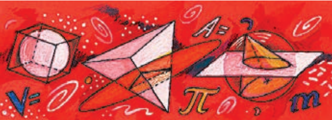
amiből a rombusz területére kapjuk, hogy

$$T_{\text{rombusz}} = 2 \cdot \frac{a \cdot m}{2} = 30 \cdot 15\sqrt{2} = 450\sqrt{2}.$$

A két kifejezés egyenlőségéből:

$$30\sqrt{3} \cdot r = 450\sqrt{2} \quad \Rightarrow \quad r = \frac{450\sqrt{2}}{30\sqrt{3}} = 5\sqrt{6}.$$

Az oktaéderbe írt gömb sugara: $r = 5\sqrt{6} \approx 12{,}25$ cm.

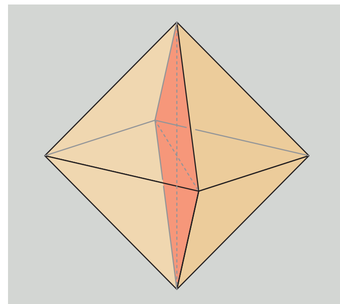


b) Vegyük az oktaéder két-két szemközti csúcsán áthaladó síkmetszetét. Ennek a négyszög alakú síkmetszetnek minden oldala a hosszúságú, átlóinak hossza $a\sqrt{2}$, a síkmetszet tehát négyzet.

A négyzet átlóinak metszéspontjától a szabályos oktaéder minden csúcsa $\frac{a\sqrt{2}}{2}$ távolságra van.

Tehát a szabályos oktaéder köré írható gömb sugara:

$$\frac{a\sqrt{2}}{2} \approx 21{,}21 \text{ cm}.$$



Vegyes feladatok I. – megoldások

4479 A visszamaradó testnek 56 csúcsa, 84 éle és 30 lapja van.

4480 A síkmetszet területe: $\frac{27\sqrt{3}}{8} \approx 5{,}85 \text{ cm}^2$.

4481 *a)* $\gamma = 90°$, $\beta \approx 33{,}69°$, $\alpha \approx 56{,}31°$. A háromszög c oldala: $2\sqrt{13} \approx 7{,}21$ cm.

b) Két ilyen háromszög van.

Az egyikben $\gamma = 30°$, a harmadik oldal hossza pedig körülbelül 3,23 cm. A háromszög másik két szöge: $\alpha \approx 111{,}73°$ és $\beta \approx 38{,}27°$.

A másik háromszögben $\gamma = 150°$, a harmadik oldal hossza körülbelül 9,67 cm. A háromszög további szögei: $\alpha \approx 18{,}15°$ és $\beta \approx 11{,}85°$.

4482 *a)* Mivel a megadott paralelogramma négyzet, bármely két szomszédos oldala 90°-os szöget zár be egymással.

b) A megadott paralelogramma két szomszédos oldala 11,54°-os vagy 168,46°-os szöget zár be egymással.

4483 A körgyűrűcikk szélessége 4,75 cm. A középponti szöge $\alpha = \frac{14}{7} = 2$ radián, azaz $\alpha \approx 114{,}59°$.

4484 *a)* A háromszög területét Heron képletével számolhatjuk:

$$T = \sqrt{21 \cdot 8 \cdot 7 \cdot 6} = 84 \text{ cm}^2.$$

b) A legkisebb kör alakú kartonlapnak a sugara, amelyből a háromszöget kivághattuk, éppen a háromszög körülírt körének sugara. Ha a körülírt kör sugara R, akkor:

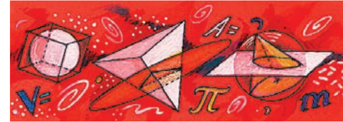
$$R = \frac{a \cdot b \cdot c}{4 \cdot T} = \frac{13 \cdot 14 \cdot 15}{4 \cdot 84} = 8{,}125 \text{ cm}.$$

A körülírt kör területe körülbelül $207{,}39 \text{ cm}^2$.

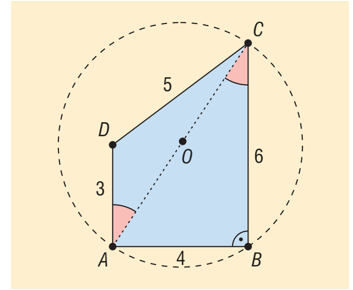
c) A háromszöglapból kivágható legnagyobb kör a háromszögbe írható kör. Ennek r sugarára:

$$r = \frac{T}{s} = \frac{84}{21} = 4 \text{ cm}.$$

A legnagyobb kivágható kör területe körülbelül $50{,}27 \text{ cm}^2$.



4485 *a)* Mivel $AB^2 + BC^2 = AC^2$ teljesül, ezért az $ABC_\triangle$ derékszögű, amelyben az AC oldal az átfogó.



Az $ABCD$ négyszög területére teljesül:

$$T_{ABCD} = T_{ABC} + T_{ACD}.$$

Az ABC derékszögű háromszög területe:

$$T_{ABC} = \frac{4 \cdot 6}{2} = 12 \text{ cm}^2.$$

Az $ACD_\triangle$ területét Heron képletével számolhatjuk:

$$T_{ACD} = \sqrt{\left(4+\sqrt{13}\right)\cdot\left(4-\sqrt{13}\right)\cdot\left(\sqrt{13}+1\right)\cdot\left(\sqrt{13}-1\right)} = \sqrt{3\cdot 12} = 6 \text{ cm}^2.$$

Az $ABCD$ négyszög területe:

$$T_{ABCD} = 12 + 6 = 18 \text{ cm}^2.$$

b) Mivel az $ABC_\triangle$ derékszögű, ezért ha létezik olyan kör, amelyre a négyszög összes csúcsa illeszkedik, akkor a húrnégyszögek tétele alapján az $ACD_\triangle$-ben a D csúcsnál szintén 90º-os szögnek kellene lennie. Mivel:

$$3^2 + 5^2 < \left(2\sqrt{13}\right)^2,$$

ezért az $ACD_\triangle$ tompaszögű, vagyis az $ABCD$ négyszögnek nem létezik körülírt köre (azaz nem húrnégyszög).

c) A *b)* részben láttuk, hogy az $ACD_\triangle$ tompaszögű, vagyis az AC átló a D pontból 90º-nál nagyobb szög alatt látszik, tehát a D pont az $ABC_\triangle$ Thalész-körének belső pontja. Az $ABCD$ négyszöget teljes egészében lefedő kör legalább akkora sugarú, mint az $ABC_\triangle$ köré írt kör sugara, ezért a legkisebb sugarú kör, amely lefedi a négyszöget, éppen az AC szakasz Thalész-köre. Ennek sugara $\sqrt{13}$ cm, területe pedig $13\pi \approx 40{,}84 \text{ cm}^2$.

d) A $DAC_\triangle$-ben a koszinusztétel alapján:

$$\cos DAC\sphericalangle = \frac{3^2 + \left(2\sqrt{13}\right)^2 - 5^2}{2\cdot 3\cdot\left(2\sqrt{13}\right)} = \frac{3}{\sqrt{13}}.$$

Az ABC derékszögű háromszögben:

$$\cos ACB\sphericalangle = \frac{6}{2\sqrt{13}} = \frac{3}{\sqrt{13}}.$$

A kapott eredményeket összehasonlítva láthatjuk, hogy $DAC\sphericalangle = ACB\sphericalangle$, ezért az AD és CB szakaszok párhuzamosak egymással, így az $ABCD$ négyszög trapéz.

4486 *a)* A legbelső futósáv középkörének sugara:

$$r = \frac{400}{2\pi} \approx 63{,}66 \text{ m}.$$

Belülről kifelé haladva a következő futósáv középkörének sugara 64,66 m, hossza 406,3 méter. A következő sáv középkörének sugara 65,66 m, hossza 412,6 méter. A legkülső sáv középkörének sugara 66,66 méter, hossza 418,8 méter.

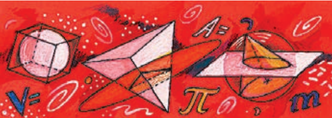
b) A körgyűrű területe:

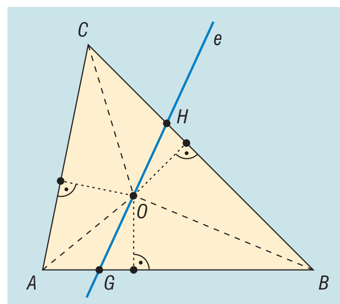
$$2\cdot\rho\cdot m\cdot\pi,$$

ahol ρ a középkörének sugara, m pedig a szélessége.

A képlet alkalmazásával az egyes futósávokra a következő területeket kapjuk:

$$400{,}0 \text{ m}^2,\quad 406{,}3 \text{ m}^2,\quad 412{,}6 \text{ m}^2,\quad 418{,}8 \text{ m}^2.$$





4487 Tegyük fel, hogy az e egyenes megfelezi az $ABC_\triangle$ kerületét és területét. Ha az e egyenes az $ABC_\triangle$-et két másik háromszögre bontja, azaz átmegy a háromszög egyik csúcsán, akkor a két részháromszög területének egyenlőségéből következik, hogy az e egyenes a háromszög egyik súlyvonala, a kerületek egyenlőségéből pedig az következik, hogy a háromszög egyenlő szárú. Mivel az egyenlő szárú háromszög csúcsából induló súlyvonal egyben szögfelező is, ezért az e egyenes valóban tartalmaz olyan pontot, amely a háromszög oldalaitól egyenlő távolságra található, ugyanis a beírt kör középpontja megfelel a feltételeknek.

Ha az e egyenes nem megy át a háromszög egyetlen csúcsán sem, akkor a háromszöget egy négyszögre és egy másik háromszögre bontja. Tegyük fel, hogy az egyenes a háromszögnek az AB és BC oldalait metszi, AB-t G-ben és BC-t H-ban. Legyen $AG = x$, $CH = y$, továbbá ebből adódóan $GB = c - x$ és $HB = a - y$. Legyen továbbá O a B csúcsból induló szögfelező és az e egyenes metszéspontja. Ekkor persze az O pont az AB és BC oldalaktól egyforma távolságra található, amit r-rel jelöltünk. A $GHB_\triangle$ területe:

$$T_{GHB} = \frac{(c-x)r}{2} + \frac{(a-y)r}{2}.$$

Az $AGHC$ négyszög területe:

$$T_{AGHC} = T_{AGO} + T_{HCO} + T_{CAO} = \frac{xr}{2} + \frac{yr}{2} + \frac{br'}{2},$$

ahol r' az O pont AC oldaltól mért távolsága.

Mivel az e egyenes megfelezi az $ABC_\triangle$ területét, ezért:

$$\frac{(c-x)r}{2} + \frac{(a-y)r}{2} = \frac{xr}{2} + \frac{yr}{2} + \frac{br'}{2},$$

$$(c-x)r + (a-y)r = xr + yr + br'. \qquad (1)$$

Vegyük figyelembe, hogy az e egyenes megfelezi az $ABC_\triangle$ kerületét is, ezért:

$$c - x + a - y = x + y + b,$$

amiből r-rel való szorzás után:

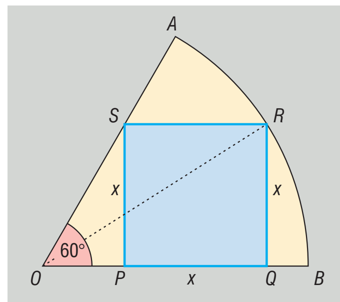
$$(c-x)r + (a-y)r = xr + yr + br. \qquad (2)$$

Az (1) és (2) egyenlőségek bal oldalán ugyanaz a kifejezés áll, ezért a bal oldalon álló mennyiségek is megegyeznek, azaz:

$$xr + yr + br' = xr + yr + br,$$

amiből következik, hogy $r = r'$. Ez azt jelenti, hogy az O pont a háromszög mindhárom oldalától egyenlő távolságra található, amit éppen bizonyítanunk kellett.

Megjegyzés: Az O pont éppen a háromszög beírt körének középpontja.

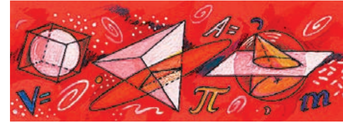


4488 A körcikkben az ábra szerint elhelyezett $PQRS$ négyzet oldalát jelöljük x-szel. Az OPS derékszögű háromszögben:

$$\operatorname{tg} 60^\circ = \frac{x}{OP} \quad \Rightarrow \quad OP = \frac{x}{\sqrt{3}} = \frac{x\sqrt{3}}{3}.$$

Ebből következik, hogy az ORQ derékszögű háromszög oldalai:

$$OQ = x + \frac{x\sqrt{3}}{3} = x \cdot \left(1 + \frac{\sqrt{3}}{3}\right), \qquad RQ = x, \qquad OR = 12 \text{ cm}.$$

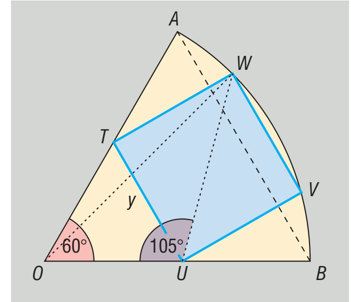


Az $ORQ_\triangle$-ben felírhatjuk Pitagorasz tételét:

$$x^2 \cdot \left(1+\frac{\sqrt{3}}{3}\right)^2 + x^2 = 12^2 \quad \Rightarrow \quad x^2 \cdot \frac{7+2\sqrt{3}}{3} = 144,$$

amiből a $PQRS$ négyzet területe:

$$x^2 = \frac{432}{7+2\sqrt{3}} \approx 41{,}28\ \text{cm}^2.$$



A körcikkben az ábra szerint elhelyezett $TUVW$ négyzet oldalát y-nal jelöltük. A feltételek szerint az UT szakasz párhuzamos az AB húrral, amiből következik, hogy az $OUT_\triangle$ szögei páronként megegyeznek az $OBA_\triangle$ szögeivel, azaz a két háromszög hasonló. Mivel az $OBA_\triangle$ szabályos ($OA = OB$ és a két oldal 60°-os szöget fog közre), ezért a hozzá hasonló $OUT_\triangle$ is szabályos, így $OU = y$.

Tekintsük ezután az $OUW_\triangle$-et. A háromszög oldalai:

$$OU = y, \quad UW = y\sqrt{2} \quad \text{és} \quad OW = 12\ \text{cm}.$$

A háromszög megfelelő szögére:

$$OUW\sphericalangle = OUT\sphericalangle + TUW\sphericalangle = 60° + 45° = 105°.$$

A koszinusztétel alapján:

$$OW^2 = OU^2 + UW^2 - 2 \cdot OU \cdot UW \cdot \cos 105°,$$
$$144 = y^2 + 2y^2 - 2y\sqrt{2} \cdot y \cdot \cos 105°,$$

amiből a műveletek elvégzése után a $TUVW$ négyzet területére adódik, hogy:

$$y^2 = \frac{144}{3 - 2\sqrt{2} \cdot \cos 105°} \approx 38{,}58\ \text{cm}^2.$$

Eredményeink alapján az első esetben kapunk nagyobb területű négyzetet.

4489 Ha a fából készült kocka éleinek hossza x cm, valamint a darabolás után keletkező kisebb kocka éleinek hossza y cm $(x > y)$, akkor a feltételek szerint a nagyobb kocka és a darabolás után keletkező kisebb kocka térfogatának különbségére teljesül, hogy: $x^3 - y^3 = 152$.

Az ismert nevezetes azonosság alkalmazásával szorzattá alakítva kapjuk, hogy:

$$(x-y) \cdot \left(x^2 + xy + y^2\right) = 152.$$

A bal oldalon szereplő szorzat tényezői pozitív egész számok, továbbá látható, hogy a második tényező határozottan nagyobb, mint az első, ezért a következő esetek lehetségesek.

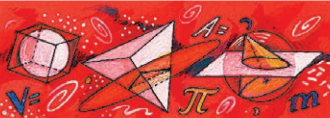
I. eset: $x - y = 1$ és $x^2 + xy + y^2 = 152$. Az első egyenletből $x^2 - 2xy + y^2 = 1$, amit a második egyenletből kivonva kapjuk, hogy $3xy = 151$. Mivel a 151 nem osztható 3-mal, ezért ez az eset nem teljesülhet.

II. eset: $x - y = 2$ és $x^2 + xy + y^2 = 76$. A második egyenletből kivonva az első egyenlet négyzetét: $3xy = 72$, azaz $xy = 24$. Tekintettel arra, hogy x pontosan 2-vel nagyobb y-nál, könnyen beláthatjuk, hogy $x = 6$, $y = 4$.

III. eset: $x - y = 4$ és $x^2 + xy + y^2 = 38$. A már kétszer alkalmazott módszer most a $3xy = 22$ egyenletre vezet. Mivel a 22 nem osztható 3-mal, ezért ez az eset nem teljesülhet.

IV. eset: $x - y = 8$ és $x^2 + xy + y^2 = 19$. Ezúttal $3xy = -45$. Mivel a bal oldalon pozitív számok állnak, amelyek szorzata nem lehet negatív szám, ezért ez az eset sem teljesülhet.

A feltételeknek egyetlen kocka tesz eleget, amelynek élei 6 cm hosszúak. Az ellenőrzés mutatja, hogy a 6 cm élű kocka valóban feldarabolható az ismertetett módon.



Vegyes feladatok II. – megoldások

4490 *a)* A téglatest felszíne: $2248\ \text{cm}^2$.
b) A téglatest térfogata: $6240\ \text{cm}^3$.

4491 A négyzetes hasáb térfogata: $1685{,}11\ \text{cm}^3$.

4492 A padlástér legnagyobb magassága: 8 m.

4493 *a)* A sajtból megközelítőleg 592 darab szokásos méretű sajtot lehetett volna készíteni.
b) Egy ilyen minőségű 1,4 kg tömegű sajt elkészítéséhez megközelítőleg 10 liter tej kellene.
c) Megközelítőleg 183 napra lenne elegendő.

4494 A hangyaleső lárvájának megközelítőleg $84\ \text{cm}^3$ térfogatú homokot kellett megmozgatnia.

4495 Egy liter aszúból körülbelül 242 borbonbont lehet készíteni.

4496 *a)* A keletkezett forgástest felszíne: $300\pi \approx 942{,}48\ \text{cm}^2$.
b) A keletkezett forgástest térfogata: $240\pi \approx 753{,}98\ \text{cm}^3$.

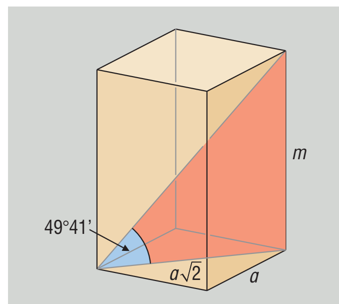
4497 A lavórba megközelítőleg 22 liter víz fér.

4498 A golyók felületének az összege: $130{,}46\ \text{cm}^2$.

4499 A négyzetes oszlop alapéle legyen a, oldaléle m hosszúságú.
A feladat feltételei alapján:

$$\frac{m}{a\sqrt{2}} = \operatorname{tg} 49°41',$$

$$a^2 \cdot m = 2880.$$



Az egyenletrendszer megoldásai: $a = 12$ és $m = 20$.
A négyzetes oszlop felszíne:

$$2 \cdot 12^2 + 48 \cdot 20 = 1248\ \text{cm}^2.$$

4500 A feladat szövege alapján egy átlagos testalkatú ember térfogata:

$$V_1 = 1{,}5 \cdot 0{,}08 = 0{,}12\ \text{m}^3.$$

A földön élő 6,9 milliárd ember térfogata:

$$V = 6{,}9 \cdot 10^9 \cdot 0{,}12 = 0{,}828 \cdot 10^9\ \text{m}^3 = 0{,}828\ \text{km}^3.$$

A Balaton vízszintjének h emelkedésére felírhatjuk, hogy:

$$0{,}828 = h \cdot 594 \quad \Rightarrow \quad h \approx 0{,}0014\ \text{km}.$$

A Balaton vízszintje 1,4 m-rel emelkedne.

4501 *a)* Az UTP kábel keresztmetszete $T = 2{,}75^2 \cdot \pi\ \text{mm}^2$, tehát kétszer 20 méter térfogata:

$$V = 2{,}75^2 \cdot \pi \cdot 40\,000 \approx 950\,332\ \text{mm}^3 \approx 950{,}33\ \text{cm}^3.$$

A kábel tömege:

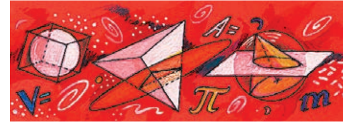
$$m_1 = V \cdot \rho = 950{,}33 \cdot 0{,}8 \approx 760\ \text{g}.$$

A cső tömege:

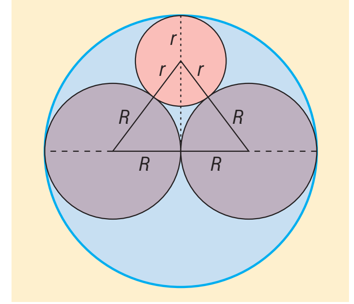
$$m_2 = 20 \cdot 0{,}5 = 10\ \text{dkg} = 100\ \text{g}.$$

A cső és a kábel együttes tömege:

$$m = m_1 + m_2 = 860\ \text{g} = 86\ \text{dkg}.$$



b) Az UTP kábel sugara $R = 2{,}75$ mm, a csőbe még behúzható legnagyobb sugarú kábel sugara legyen r.



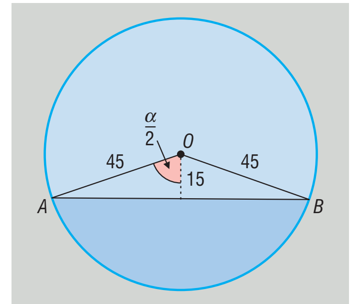
Vegyük a bekábelezett cső ábrán látható keresztmetszetét.

A három kábel kör keresztmetszetének középpontjai egy olyan egyenlő szárú háromszöget határoznak meg, amelynek alapja $2R$, szárai $R + r$, az alaphoz tartozó magassága pedig $2R - r$ hosszúságúak. Írjuk fel Pitagorasz tételét a magasság által létrehozott egyik derékszögű háromszögben:

$$(R+r)^2 = R^2 + (2R-r)^2 \quad \Rightarrow \quad r = \frac{2}{3}R.$$

A csőbe legfeljebb $2r = \frac{4}{3}R = \frac{4}{3} \cdot 2{,}75 \approx 3{,}67$ mm külső átmérőjű kábel húzható.

4502 Tekintsük a csatorna ábrán látható keresztmetszetét.



Számoljuk ki, hogy a keresztmetszetben mekkora területű részt foglal el az átfolyó víz. Ez egy 45 cm sugarú körszelet, amelyet az AB húr határol. A húrnak a kör középpontjától vett távolsága a sugár harmadrésze, azaz 15 cm. Ez alapján az α középponti szögre felírható:

$$\cos\frac{\alpha}{2} = \frac{15}{45} \quad \Rightarrow \quad \alpha \approx 141{,}06^\circ.$$

A körszelet területe:

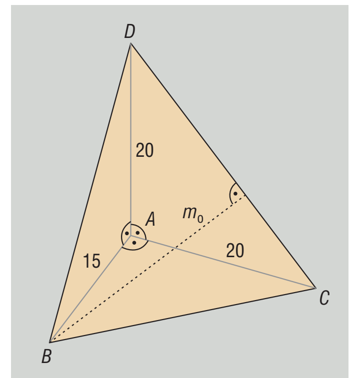
$$T = r^2 \cdot \pi \cdot \frac{\alpha}{360^\circ} - \frac{r^2 \cdot \sin\alpha}{2} = 45^2 \cdot \pi \cdot \frac{141{,}06^\circ}{360^\circ} - \frac{45^2 \cdot \sin 141{,}06^\circ}{2} \approx$$

$$\approx 1856{,}37 \text{ cm}^2 \approx 0{,}19 \text{ m}^2.$$

A csatorna óránként annyi vizet enged át, amekkora egy T alapterületű $m = 0{,}8 \cdot 3600 = 2880$ m magasságú hengerszerű test térfogata.

Óránként a csatorna $V = T \cdot m = 547{,}2 \text{ m}^3$ vizet enged át.

4503 A tetraéder magassága legyen $m = AD = 20$ cm, az alaplapja az $ABC_\triangle$, melynek területe:



$$T_{ABC} = \frac{15 \cdot 20}{2} = 150 \text{ cm}^2.$$

a) A tetraéder térfogata:

$$V = \frac{T \cdot m}{3} = \frac{\frac{15 \cdot 20}{2} \cdot 20}{3} = 1000 \text{ cm}^3.$$

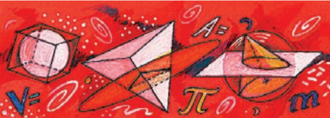
b) A felszín kiszámításához szükségünk van az oldallapok területére.

Az ABC derékszögű háromszögből:

$$BC = \sqrt{15^2 + 20^2} = 25 \text{ cm}.$$

Mivel az $ABC_\triangle$ és az $ABD_\triangle$ egybevágó: $DB = 25$ cm.

Az ACD derékszögű háromszögből: $DC = 20\sqrt{2}$ cm.



A tetraéder BCD oldallapja egyenlő szárú háromszög. Szárainak hossza 25 cm, alapja $20\sqrt{2}$ cm hosszú, így az alaphoz tartozó magassága:

$$m_o = \sqrt{25^2 - \left(\frac{20\sqrt{2}}{2}\right)^2} = \sqrt{425} = 5\sqrt{17} \quad \Rightarrow \quad T_{BCD} = \frac{20\sqrt{2} \cdot 5\sqrt{17}}{2} = 50\sqrt{34}\ \text{cm}^2.$$

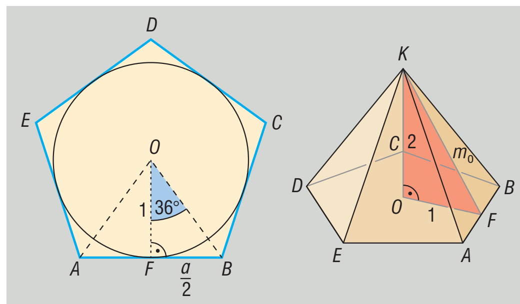
A tetraéder másik három oldallapjának területe:

$$T_{ABC} = T_{ABD} = 150\ \text{cm}^2 \quad \text{és} \quad T_{ACD} = 200\ \text{cm}^2.$$

A tetraéder felszíne:

$$A = 2 \cdot T_{ABC} + T_{ACD} + T_{BCD} = 2 \cdot 150 + 200 + 50\sqrt{34} = 500 + 50\sqrt{34} \approx 791{,}55\ \text{cm}^2.$$

4504 Az ábrák jelöléseinek megfelelően a gúla magassága $m = 2$ m, az alaplap beírt körének sugara $r = 1$ m, alapéle pedig a. Az alaplap beírt köre az alapélt az él F felezőpontjánál érinti.



A BFO derékszögű háromszög O csúcsánál lévő szöge: $\frac{360^\circ}{5} \cdot \frac{1}{2} = 36^\circ$, amiből:

$$\text{tg}\,36^\circ = \frac{\frac{a}{2}}{1} \quad \Rightarrow \quad a \approx 2 \cdot \text{tg}\,36^\circ\ \text{m}.$$

a) A gúla alaplapjának területe:

$$T = 5 \cdot \frac{a \cdot r}{2} \approx 5 \cdot \text{tg}\,36^\circ\ \text{m}^2 \quad \Rightarrow \quad V = \frac{T \cdot m}{3} = \frac{5 \cdot \text{tg}\,36^\circ \cdot 2}{3} \approx 4{,}42\ \text{m}^3.$$

A gúla térfogata $4{,}42\ \text{m}^3$.

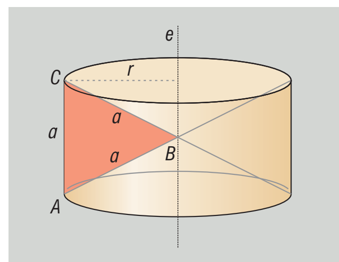
b) A palást felszínének kiszámításához szükség van az oldallap m_o magasságára. Az OFK derékszögű háromszögben ismerjük az OK és OF befogókat, így az m_o átfogó:

$$m_o = \sqrt{OK^2 + OF^2} = \sqrt{2^2 + 1^2} = \sqrt{5}\ \text{m}.$$

A gúla palástjának felszíne:

$$A_{\text{palást}} = 5 \cdot \frac{a \cdot m_o}{2} = 5 \cdot \text{tg}\,36^\circ \cdot \sqrt{5} \approx 8{,}12\ \text{m}^2.$$

4505 Az $a = 12$ cm oldalú szabályos ABC háromszöget e egyenes körül megforgatva egy olyan körhengert kapunk, amelyből két egybevágó körkúpot kivágtunk.



A két kúp és a körhenger alapkörének a sugara a szabályos háromszög magassága: $r = \frac{a\sqrt{3}}{2}$. A henger magassága a háromszög oldalának az a hossza, a kúpok magassága pedig $\frac{a}{2}$.

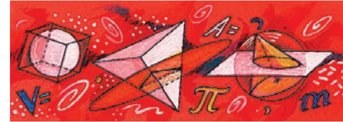
A kúpok alkotóinak hossza a háromszög a oldalának a hossza.

a) A henger és a két kúp palástjának területét összeadva megkapjuk a forgástest felszínét:

$$A = A_{\text{hengerpalást}} + 2 \cdot A_{\text{kúppalást}} = 2r \cdot \pi \cdot a + 2r \cdot \pi \cdot a = 4r \cdot \pi \cdot a = 4 \cdot \frac{a\sqrt{3}}{2} \cdot \pi \cdot a =$$

$$= 2\sqrt{3} \cdot \pi \cdot a^2 = 2\sqrt{3} \cdot \pi \cdot 144 \approx 1567{,}12\ \text{cm}^2.$$

A forgástest felszíne: $A \approx 1567{,}12\ \text{cm}^2$.



b) A forgástest térfogatát megkaphatjuk úgy, hogy a henger térfogatából kivonjuk a két kúp térfogatát:

$$V = V_{\text{henger}} - 2 \cdot V_{\text{kúp}} = r^2 \cdot \pi \cdot m_{\text{henger}} - 2 \cdot \frac{r^2 \cdot \pi \cdot m_{\text{kúp}}}{3} = r^2 \cdot \pi \cdot \left(m_{\text{henger}} - \frac{2}{3} m_{\text{kúp}}\right) =$$

$$= \left(\frac{12\sqrt{3}}{2}\right)^2 \cdot \pi \cdot \left(12 - \frac{2}{3} \cdot 6\right) = 864\pi \approx 2714{,}34 \text{ cm}^3.$$

A forgástest térfogata: $V \approx 2714{,}34 \text{ cm}^3$.

4506 A csonka kúp alakú tejfölös doboz fedőkörének sugara $R = 4{,}25$ cm, az alapkör sugara $r = 3{,}25$ cm, az alkotója $a = 12$ cm.

A csonka kúp m magassága az $a^2 = m^2 + (R - r)^2$ összefüggés alapján:

$$m = \sqrt{a^2 - (R - r)^2} = \sqrt{12^2 - 1^2} = \sqrt{143} \text{ cm}.$$

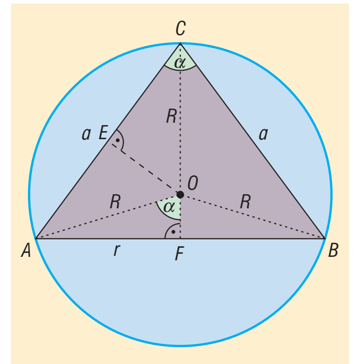
A doboz térfogata:

$$V = \frac{m \cdot \pi}{3} \cdot \left(R^2 + R \cdot r + r^2\right) = \frac{\sqrt{143} \cdot \pi}{3} \cdot \left(4{,}25^2 + 4{,}25 \cdot 3{,}25 + 3{,}25^2\right) \approx 531{,}43 \text{ cm}^3.$$

A tejföl sűrűsége:

$$\rho = \frac{m_{\text{tejföl}}}{V} = \frac{450}{531{,}43} \approx 0{,}85 \frac{\text{g}}{\text{cm}^3}.$$

4507 Az ábra jelölései szerint a gömbbe írt kúp tengelymetszete az $ABC_\triangle$. A háromszög körülírható körének sugara $R = 20$ cm, a háromszög szárának a hossza $a = \frac{3}{4} \cdot 2R = 30$ cm, ami a kúp a alkotójának hossza is egyben.



Az AOC egyenlő szárú háromszögben az AC oldalhoz tartozó EO magasság behúzásával kiszámítható az ABC egyenlő szárú háromszög C csúcsánál levő α szárszöge:

$$\cos\frac{\alpha}{2} = \frac{EC}{OC} \quad \Rightarrow \quad \cos\frac{\alpha}{2} = \frac{15}{20} \quad \Rightarrow \quad \alpha \approx 82{,}82^\circ.$$

A kerületi és középponti szögek tétele alapján:

$$AOB\sphericalangle = 2\alpha \quad \Rightarrow \quad AOF\sphericalangle = \alpha.$$

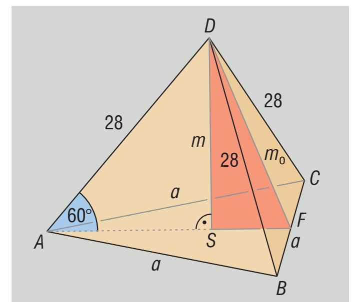
Az AOF derékszögű háromszögből meghatározható a kúp alapkörének sugara:

$$\sin\alpha = \frac{r}{R} \quad \Rightarrow \quad \sin 82{,}82^\circ = \frac{r}{20} \quad \Rightarrow \quad r \approx 19{,}84 \text{ cm}.$$

A gömbbe írt kúp felszíne:

$$A = \pi \cdot r \cdot (r + a) = \pi \cdot 19{,}84 \cdot (19{,}84 + 30) \approx 3106{,}49 \text{ cm}^2.$$

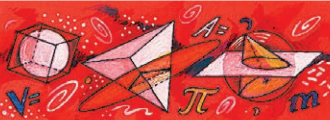
4508 Tekintsük a mellékelt ábrát. Legyen a gúla alapéle a.



Mivel szabályos háromszög alapú gúláról van szó, a D csúcsnak az alaplapra eső merőleges vetülete az ABC szabályos háromszög S súlypontja.

Egy háromszögben a súlypont a súlyvonal csúcstól távolabbi harmadolópontja, tehát:

$$AS = \frac{a\sqrt{3}}{2} \cdot \frac{2}{3} = \frac{a\sqrt{3}}{3}.$$



Az ASD fél szabályos háromszögben:

$$SD = AD \cdot \frac{\sqrt{3}}{2} = 14\sqrt{3}, \quad \text{tehát a gúla testmagassága: } m = 14\sqrt{3} \text{ cm},$$

valamint:

$$AS = \frac{AD}{2} \quad \Rightarrow \quad \frac{a\sqrt{3}}{3} = 14, \quad \text{tehát a gúla alapéle: } a = 14\sqrt{3}.$$

A gúla oldallapjának magassága a DBC egyenlő szárú háromszögből számítható:

$$m_o = DF = \sqrt{BD^2 - BF^2} = \sqrt{28^2 - \left(\frac{14\sqrt{3}}{2}\right)^2} = 7\sqrt{13} \text{ cm}.$$

a) A gúla felszíne:

$$A = T + 3 \cdot T_{\triangle} = \frac{a^2 \cdot \sqrt{3}}{4} + 3 \cdot \frac{a \cdot m_o}{2} = 147\sqrt{3} + 147\sqrt{39} \approx 1172{,}63 \text{ cm}^2.$$

b) A gúla térfogata:

$$V = \frac{T \cdot m}{3} = \frac{\frac{a^2 \cdot \sqrt{3}}{4} \cdot m}{3} = 2058 \text{ cm}^3.$$

4509 A süvegcukor alapkörének sugara $r = 6$ cm, magassága $m = 30$ cm.

A kúp alkotójának hossza:

$$a = \sqrt{m^2 + r^2} = \sqrt{30^2 + 6^2} = \sqrt{936} = 6\sqrt{26} \text{ cm}.$$

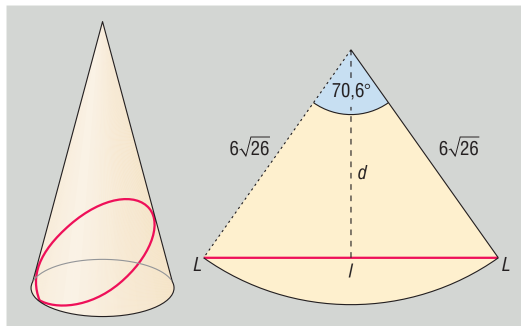
A kúp palástja egy a sugarú körcikk, amelynek középponti szögét jelölje α. A körcikk ívhossza az alaplap kerületével egyenlő:

$$2 \cdot a \cdot \pi \cdot \frac{\alpha}{360^\circ} = 2 \cdot r \cdot \pi \quad \Rightarrow \quad 2 \cdot 6 \cdot \sqrt{26} \cdot \pi \cdot \frac{\alpha}{360^\circ} = 2 \cdot 6 \cdot \pi \quad \Rightarrow \quad \alpha \approx 70{,}60^\circ.$$

a) A kúp palástját az L ponton áthaladó alkotója mentén felvágjuk, és síkba kiterítjük. A légy által megtett legrövidebb út az így kapott körcikk l hosszúságú húrja. A húr hossza annak az egyenlő szárú háromszögnek az alapja, amelynek szárszöge $70{,}60^\circ$, szára $6\sqrt{26}$:

$$l = 2 \cdot 6 \cdot \sqrt{26} \cdot \sin\frac{70{,}60^\circ}{2} \approx 35{,}36.$$

A légy által megtett út 35,36 cm.



b) Tekintsük a kúp P ponton áthaladó tengelymetszetét az ábrán látható jelölésekkel.

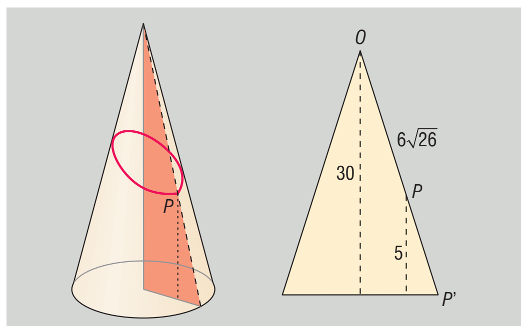
A párhuzamos szelőszakaszok tétele alapján:

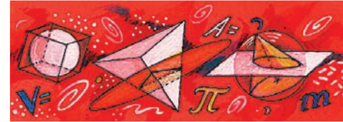
$$\frac{PP'}{OP'} = \frac{5}{30},$$

$$PP' = 6\sqrt{26} \cdot \frac{1}{6} = \sqrt{26}.$$

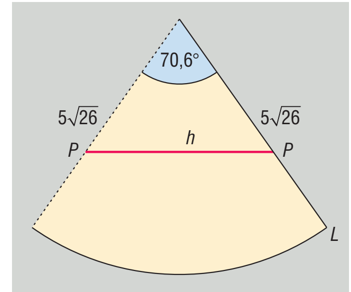
A P pontnak a kúp csúcsától vett távolsága:

$$OP = 6\sqrt{26} - \sqrt{26} = 5\sqrt{26} \text{ cm}.$$





A kúp palástját a P ponton áthaladó alkotója mentén felvágjuk, és síkba kiterítjük. A hangya által megtett legrövidebb út az így kapott körcikk azon h húrjának a hosszúsága, amelynek végpontjai a határoló sugarakon a kúp csúcsától $5\sqrt{26}$ cm távolságra vannak:



$$l = 2 \cdot 5 \cdot \sqrt{26} \cdot \sin\frac{70,60^\circ}{2} \approx 29,47.$$

A hangya által megtett út 29,47 cm.

c) A légy akkor kerül a legközelebb a kúp csúcsához, amikor az út felét megtette. Ekkor a csúcstól vett távolság:

$$d = 6\sqrt{26} \cdot \cos\frac{70,60^\circ}{2} \approx 24,97 \text{ cm}.$$

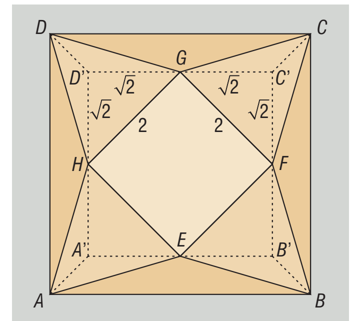
A hangya a kiinduló helyzetében van legtávolabb a kúp csúcsától. Ez a távolság:

$$OP = 5\sqrt{26} \approx 25,50 \text{ cm}.$$

Mivel $OP > d$, a hangya és a légy találkozhat a süvegcukor felületén.

4510 Tekintsünk egy olyan szabályos négyoldalú csonka gúlát, amelynek az alapéle 4 dm, a fedőlapjának felezőpontjai által meghatározott négyzet oldala 2 dm, magassága pedig 1,5 dm.

Az emlékmű talapzatát ennek a testnek a csonkolásával kapjuk úgy, hogy a fedőlap minden csúcsánál levágunk egy-egy tetraédert.



A felülnézeti ábrán az emlékmű talapzata az $ABCDEFGH$ test. Ha az $ABCDA'B'C'D'$ csonka gúla A', B', C' és D' csúcsainál levágjuk az $EHA'A$, az $EFB'B$, az $FGC'C$ és a $HGD'D$ egybevágó tetraédereket, akkor éppen a talapzatot kapjuk meg.

A HGD' egyenlő szárú derékszögű háromszög átfogója 2, így befogói $\sqrt{2}$ hosszúságúak, ezért az $A'B'C'D'$ négyzet oldalának a hossza $2\sqrt{2}$.

$$V_{ABCDA'B'C'D'} = V = \frac{m}{3} \cdot \left(T + \sqrt{T \cdot t} + t\right) =$$
$$= \frac{1,5}{3} \cdot \left(4^2 + 4 \cdot 2\sqrt{2} + \left(2\sqrt{2}\right)^2\right) = 12 + 4\sqrt{2}.$$

A levágandó egybevágó tetraéderek (pl. $HGD'D$) alaplapjának területe a $\sqrt{2}$ befogójú egyenlő szárú derékszögű háromszög területe, magassága $m = 1,5$, így:

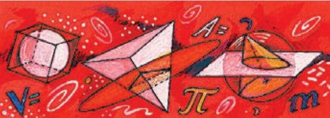
$$T' = \frac{\left(\sqrt{2}\right)^2}{2} = 1 \quad \text{és} \quad V_{\text{tetraéder}} = \frac{T' \cdot m}{3} = \frac{1}{2}.$$

Az emlékmű térfogata:

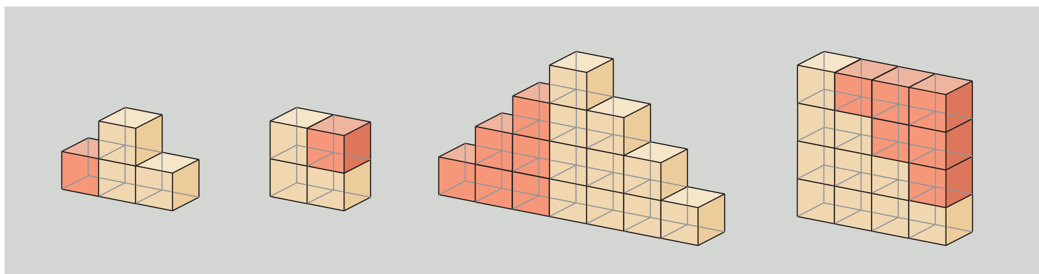
$$V = V_{ABCDA'B'C'D'} - 4 \cdot V_{\text{tetraéder}} = 12 + 4\sqrt{2} - 4 \cdot \frac{1}{2} =$$
$$= 10 + 4\sqrt{2} \approx 15,66 \text{ dm}^3.$$

A talapzat tömege:

$$m_{\text{talapzat}} = V \cdot \rho = 15,66 \cdot 2,7 = 42,28 \text{ kg}.$$



4511 *a)* Észrevehető, hogy minden függőleges réteg átdarabolható egy négyzetes elrendezésbe:



Mivel a rétegek magassága mindig kettővel nő, ezért a páros négyzetszámok adják meg a szomszédos rétegekben levő kockák darabszámát.

Az építményben a kis kockák száma:

$$4 + 16 + 36 + 64 + 100 + 144 + 100 + 64 + 36 + 16 + 4 = 584.$$

b) Az építmény elölnézetének területe megegyezik a legmagasabb függőleges réteg területével. Ezt a felületet elöl és hátul is le kell festeni. Az előzőek alapján ez a két felület:

$$2 \cdot 12^2 = 288 \text{ cm}^2.$$

Az építmény oldalnézetben kétkockányi magasságról indul, és mindig újabb két kockával növekszik, amíg el nem éri a 12 kockányi magasságot, majd onnan az előző szabály alapján kétkockányi magasságig csökken. Két oldalról a lefestendő felület:

$$2 \cdot (2 + 4 + 6 + 8 + 10 + 12 + 10 + 8 + 6 + 4 + 2) = 144 \text{ cm}^2.$$

Felülről az építmény alapjának megfelelő területet kell lefesteni:

$$3 + 7 + 11 + 15 + 19 + 23 + 19 + 15 + 11 + 7 + 3 = 133 \text{ cm}^2.$$

A befestendő felület összesen:

$$288 + 144 + 133 = 565 \text{ cm}^2.$$

c) Az első függőleges réteg 2^2 darab kockából áll, és ennyit takar el a második függőleges réteg nem szélső kockáiból, így ezeket nem kell befesteni.

A második függőleges réteg 4^2 darabot takar el, a harmadik 6^2-t, és így tovább egészen az ötödik függőleges rétegig, ami 10^2 kocka festését nem engedi meg a hatodik legmagasabb rétegből.

Ettől kezdve a csökkenő magasságú oldalon az előzőkhöz hasonlóan gondolkodhatunk.

Az építményben így

$$2^2 + 4^2 + 6^2 + 8^2 + 10^2 + 8^2 + 6^2 + 4^2 + 2^2 = 340$$

kockának nem lesz egy oldala sem befestve.